INGENIEUR-ARCHIV

UNTER MITWIRKUNG DER
GESELLSCHAFT FÜR ANGEWANDTE MATHEMATIK UND MECHANIK
ZUSAMMEN MIT

A. BETZ · A. HERTWIG · K. KLOTTER
K. v. SANDEN · E. SCHMIDT · E. SÖRENSEN

HERAUSGEGEBEN VON

R. GRAMMEL

XIX. BAND SECHSTES (SCHLUSS-) HEFT 1951

SPRINGER-VERLAG · BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG

Ing.-Archiv

Preis DM 15.—

Das

INGENIEUR-ARCHIV

erscheint nach Maßgabe des eingehenden Materials zwanglos in einzeln berechneten Heften, die zu Bänden vereinigt werden.

Die für das Ingenieur-Archiv bestimmten Manuskripte sind unmittelbar an den Herausgeber

Herrn Professor Dr.-Ing. Dr. **R. Grammel**, Stuttgart N, Robert-Bosch-Straße 101

oder an die Herren

Professor Dr.-Ing. Dr. **A. Betz**, Göttingen, Herzberger Landstraße 39 A
Geh. Reg.-Rat Professor Dr.-Ing. **A. Hertwig**, Berlin-Wilmersdorf, Sächsische Str. 43
Professor Dr.-Ing. **K. Klotter**, Stanford (Calif.), 621 Alvarado Row.
Professor **K. v. Sanden**, Karlsruhe-Land I, Rosmarinstraße 11
Professor Dr.-Ing. **E. Schmidt**, Braunschweig, Harzburger Straße 8a
Professor Dr.-Ing. **E. Sörensen**, Augsburg, MAN

einzusenden.

Die zum Druck angenommenen Arbeiten werden, soweit dies drucktechnisch möglich ist, nach der Reihenfolge ihres Eingangs beim Herausgeber veröffentlicht.

Die Mitarbeiter erhalten von ihrer Arbeit zusammen 75 Sonderdrucke unentgeltlich.

Für die Abfassung der Arbeiten wird auf das vom Deutschen Normenausschuß herausgegebene Heft „Gestaltung technisch-wissenschaftlicher Veröffentlichungen" hingewiesen. Die Vorlagen für Abbildungen sind auf besonderen Blättern erwünscht und können entweder in Reinzeichnungen oder in klar verständlichen Handskizzen bestehen; die Beschriftung und nötigenfalls die Reinzeichnung nimmt der Verlag vor.

SPRINGER-VERLAG

Heidelberg
Neuenheimer Landstraße 24
Fernsprecher 24 40 u. 54 30

Berlin W 35
Reichpietschufer 20
Fernsprecher Sammel-Nr. 24 92 51

Vertriebsvertretung im Ausland:
Lange, Maxwell & Springer Ltd., 41–45 Neal Street, London, W. C. 2

Inhalt:

Seite

Byrd, P. F., Ergänzung zu dem Aufsatz von N. Scholz, Beiträge zur Theorie der tragenden Fläche 321

Schmidt, K., Behandlung ebener Elastizitätsprobleme mit Hilfe hyperkomplexer Singularitäten. Mit 6 Textabbildungen 324

Szabó, I., Beiträge zur Theorie der achsensymmetrisch belasteten dicken Kreisplatte insbesondere bei elastischer Lagerung. Mit 3 Textabbildungen 342

Tolle, O., Neue Konstruktion der Wirkungslinie des resultierenden Massenwiderstandes eines eben bewegten Getriebegliedes. Mit 6 Textabbildungen 355

Tolle, O., Massenreduktion und Massendruckdrehkraft für die Schubstange eines Kurbelgetriebes. Mit 9 Textabbildungen 357

Truckenbrodt, E., Die Berechnung der Profilform bei vorgegebener Geschwindigkeitsverteilung. Mit 4 Textabbildungen 365

Pestel, E., Tragwerksauslenkung unter bewegter Last 378

Krüger, H., Über den Einfluß der Absaugung auf die Lage der Umschlagstelle an Tragflügelprofilen. Mit 6 Textabbildungen 384

Kucharski, W., Zur Veranschaulichung und Erweiterung der Theorie des Pendels mit oszillierendem Drehpunkt. Mit 10 Textabbildungen . . 388

Klotter, K., Bemerkungen zu meinem Aufsatz in Band XVIII, S. 363 des Ingenieur-Archivs 400

Jacobs, W., Berichtigung 400

INGENIEUR-ARCHIV

XIX. BAND SECHSTES (SCHLUSS-) HEFT 1951

Ergänzung zu dem Aufsatz von N. Scholz, Beiträge zur Theorie der tragenden Fläche.

Von P. F. Byrd.

N. Scholz[1] hat gezeigt, daß die Streifenmethode in Verbindung mit dem $3l/4$-Theorem für eine ebene tragende Fläche bei einer Aufteilung der Fläche bis zu vier Streifen die exakten Werte des Gesamtauftriebs und des Gesamtmoments gemäß der *Birnbaum*schen Theorie der tragenden Wirbelfläche liefert. Bei einem Kreisprofil dagegen erhält man nach der Streifenmethode zwar den Gesamtauftrieb exakt, das Gesamtmoment aber nur noch in einer (allerdings ausreichenden) Näherung. Im folgenden werden diese Ergebnisse auf den allgemeinen Fall ausgedehnt, daß die tragende Fläche in beliebig viele (n) Streifen aufgeteilt wird. Damit werden zugleich explizite Formeln [Gleichungen (16) und (18)] für die Teilzirkulationen gewonnen, die bei numerischen Rechnungen mit Vorteil verwendet werden.

a) Die ebene Platte. Teilt man die Tragfläche in n Streifen gleicher Tiefe auf, so lautet die Strömungsbedingung[2] im $3l/4$-Punkt des j-ten Streifens

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{G_i}{t_j - r_i} = \frac{1}{n} \qquad (j = 1, 2, \ldots, n) \tag{1}$$

mit

$$r_i = 2i, \quad t_j = 2j + 1 . \tag{2}$$

Dabei ist G_i die dimensionslos gemachte Teilzirkulation des i-ten Streifens. Sollen die durch (1) bestimmten Zirkulationen G_i die exakten Werte des Gesamtauftriebs und des Gesamtmoments liefern, so müssen sie zusätzlich noch den Bedingungen[3]

$$\frac{c_{a\,\mathrm{Str}}}{c_{a\,\mathrm{ex}}} \equiv \sum_{i=1}^{n} G_i = 1 \tag{3}$$

und

$$\frac{c_{m\,\mathrm{Str}}}{c_{m\,\mathrm{ex}}} \equiv \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (2r_i - 3)\, G_i = 1 \tag{4}$$

genügen.

Im folgenden wird bewiesen, daß die Lösungen G_i von (1) diese Eigenschaft besitzen. Hierzu lösen wir zuerst die Gleichungen (1) nach den G_i auf und verifizieren dann die Gleichungen (3) und (4).

Zur Vorbereitung betrachten wir die Polynome

$$\left.\begin{aligned} f(z) &= (z - r_1)(z - r_2) \ldots (z - r_n), \\ g(z) &= (z - t_1)(z - t_2) \ldots (z - t_n) \end{aligned}\right| \tag{5}$$

und bilden damit die rationalen Funktionen

$$\varphi_k(z) = z^k \frac{g(z)}{f(z)} \qquad \text{für } k = 0, 1, 2 \tag{6}$$

mit den sofort anzugebenden Partialbruchzerlegungen

$$\varphi_0(z) = 1 + \sum_{i=1}^{n} \frac{g(r_i)}{f'(r_i)} \frac{1}{z - r_i} , \tag{7}$$

---

[1] *N. Scholz*, Ing.-Arch. 18 (1950), S. 84, insbesondere S. 88f.

[2] Dies ist die Verallgemeinerung der Gleichungen (4.4) von *N. Scholz*.

[3] Gleichungen (4.5) und (4.6) bei *N. Scholz*. Die Gleichung (4.6) enthält einen Druckfehler: die rechte Seite lautet n statt 1.

$$\varphi_1(z) = z\,\varphi_0(z) = z + \sum_{i=1}^{n} \frac{g(r_i)}{f'(r_i)} + \sum_{i=1}^{n} \frac{r_i\, g(r_i)}{f'(r_i)} \frac{1}{z - r_i}, \tag{8}$$

$$\varphi_2(z) = z\,\varphi_1(z) = z^2 + z \sum_{i=1}^{n} \frac{g(r_i)}{f'(r_i)} + \sum_{i=1}^{n} \frac{r_i\, g(r_i)}{f'(r_i)} + \sum_{i=1}^{n} \frac{r_i^2\, g(r_i)}{f'(r_i)} \frac{1}{z - r_i}, \tag{9}$$

die sich noch vereinfachen lassen. Bezeichnen wir nämlich das Residuum[1] einer Funktion $\varphi(z)$ an einer Stelle a kurz mit $\mathrm{Res}(\varphi; a)$, so ist nach bekannten Sätzen der Funktionentheorie und wegen (2)

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{g(r_i)}{f'(r_i)} = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Res}(\varphi_0; r_i) = -\mathrm{Res}(\varphi_0; \infty) = -n \tag{10}$$

und ebenso

$$\left.\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} \frac{r_i\, g(r_i)}{f'(r_i)} &= -\mathrm{Res}(\varphi_1; \infty) = -\frac{n}{2}(n+3), \\ \sum_{i=1}^{n} \frac{r_i^2\, g(r_i)}{f'(r_i)} &= -\mathrm{Res}(\varphi_2; \infty) = -\frac{n}{2}(n^2+3n+4), \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

wie man unschwer feststellt. Wegen $\varphi_k(t_j) = 0$ folgen damit aus (7), (8) und (9) die Beziehungen

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{g(r_i)}{f'(r_i)} \frac{1}{t_j - r_i} = -1, \tag{12}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{r_i\, g(r_i)}{f'(r_i)} \frac{1}{t_j - r_i} = -t_j + n, \tag{13}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{r_i^2\, g(r_i)}{f'(r_i)} \frac{1}{t_j - r_i} = -t_j^2 + n t_j + \frac{n}{2}(n+3) \qquad (j = 1, 2, \ldots, n). \tag{14}$$

Nach diesen Vorbereitungen bemerken wir, daß die Determinante von (1)

$$A = \{a_{ji}\} \quad \text{mit} \quad a_{ji} = \frac{1}{t_j - r_i}$$

nicht verschwindet. Multipliziert man nämlich die Zeilen von A nacheinander mit $f(t_1), f(t_2), \ldots, f(t_n)$, so erhält man eine Determinante

$$B = A\, f(t_1)\, f(t_2) \ldots f(t_n),$$

deren Elemente

$$b_{ji} = \prod_{\substack{\varkappa=1 \\ \varkappa \neq i}}^{n} (t_j - r_\varkappa)$$

homogene Formen $(n-1)$-ten Grades in den Größen $r_1, \ldots, r_n, t_1, \ldots, t_n$ sind; (die r_i, t_j werden also vorläufig als Veränderliche angesehen). Die Determinante B ist dann in diesen Größen eine Form vom Grade $n(n-1)$, die übrigens verschwindet, wenn ein $t_\lambda = t_\mu$ oder ein $r_\varrho = r_\sigma$ gesetzt wird, weil dann in der Determinante zwei Zeilen bzw. zwei Spalten übereinstimmen. Mit Hilfe eines bekannten Satzes der Algebra über die Darstellbarkeit eines Polynoms als Produkt seiner Wurzelfaktoren folgt vollends leicht, daß

$$A = \frac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \prod_{i<j} (t_i - t_j) \prod_{i<j} (r_i - r_j)}{f(t_1) f(t_2) \ldots f(t_n)} \tag{15}$$

ist. Wegen (2) ist also sicher A von Null verschieden.

Man könnte nun ebenso die Unterdeterminanten A_{ji} berechnen und die G_i mit Hilfe der *Cramer*schen Regel aus (1) bestimmen. Da es aber wegen $A \neq 0$ genau eine Lösung von (1)

[1] Der Beweis läßt sich auch rein algebraisch unter Benützung von gewissen Reihen aus Binomialkoeffizienten führen. Den oben ausgeführten, wesentlich kürzeren Gedankengang verdanke ich einem Hinweis von Herrn Dr. *K. Zoller*, Stuttgart.

gibt, liefert der Vergleich von (1) mit (12) sofort

$$G_i = -\frac{1}{n}\frac{g(r_i)}{f'(r_i)} \qquad (i=1, 2, \ldots, n). \qquad (16)$$

Nach (10) und (11) wird nun

$$\sum_{i=1}^{n} G_i = -\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{g(r_i)}{f'(r_i)} = 1,$$

$$\sum_{i=1}^{n} r_i G_i = -\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{r_i g(r_i)}{f'(r_i)} = \frac{1}{2}(n+3)$$

und damit

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(2r_i - 3)G_i = 1.$$

Die G_i (16) genügen also den Bedingungen (3) und (4).

b) Das Kreisbogenprofil. Hier sind die Teilzirkulationen Lösungen des Gleichungssystems

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{G_i}{t_j - r_i} = \frac{2t_j - (2n+3)}{n^2} \qquad (j=1, 2 \ldots, n), \qquad (17)$$

dessen Determinante wieder A (15) ist. Durch geeignete Zusammenfassung von (12) und (13) ergibt sich jetzt

$$G_i = -\frac{2}{n^2}\frac{r_i g(r_i)}{f'(r_i)} + \frac{3}{n^2}\frac{g(r_i)}{f'(r_i)} = -\frac{2r_i - 3}{n^2}\frac{g(r_i)}{f'(r_i)} \qquad (i=1, 2, \ldots, n). \qquad (18)$$

Die G_i (18) liefern den exakten Wert des Gesamtauftriebs, wenn sie wieder der Gleichung (3) genügen. Die Bedingungsgleichung für das Gesamtmoment lautet dagegen nunmehr[1]

$$\frac{c_{m\,\mathrm{Str}}}{c_{m\,\mathrm{ex}}} = \frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{n}(2r_i - 3)\,G_i = 1. \qquad (4')$$

Aus (10) und (11) folgt mit (18)

$$\sum_{i=1}^{n} G_i = 1,$$

während

$$\frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{n}(2r_i - 3)G_i = 1 - \frac{1}{2n^2}$$

wird. Die Bedingung (3) ist also wieder erfüllt, die Bedingung (4′) aber streng nur in der Grenze für $n \to \infty$, praktisch in ausreichender Näherung von $n = 3$ ab[2].

(Eingegangen am 2. März 1951.)

Anschrift des Verfassers: *Paul F. Byrd*, Palo Alto Calif. (USA) 2655 Second Street.

[1] Man führe in Gleichung (3.2) bei *N. Scholz* an Stelle der Γ_i die G_i ein und dividiere durch den exakten Wert des Momentenbeiwerts c_m.

[2] Vgl. Zahlentafel 1 bei *N. Scholz*.

Behandlung ebener Elastizitätsprobleme mit Hilfe hyperkomplexer Singularitäten.

Von Kurt Schmidt.

1. Einleitung. Die ebenen Probleme der Elastizitätstheorie werden meist[1] mit Hilfe der *Airy*schen Spannungsfunktion, des Inversionsverfahrens oder durch komplexe Integration gelöst. Weniger bekannt dürfte sein, daß *L. Sobrero*[2] einen anderen interessanten Weg gefunden hat, die gesuchte Spannungsverteilung aus einer hyperkomplexen Funktion abzuleiten. Diese Methode steht zu der Fragestellung der ebenen Elastizitätslehre in einem ähnlichen Zusammenhang wie die Algebra der komplexen Zahlen zur Potentialtheorie. Nach einer Darstellung dieses Verfahrens, das in der vorliegenden Arbeit[3] auf den ebenen Spannungszustand angewendet werden soll, wird die hyperkomplexe Spannungsfunktion für nachstehende Belastungsfälle entwickelt:

a) Punktlast in der unendlich ausgedehnten Scheibe,
b) Punktlast im Innern einer Halbscheibe,
c) Punktlast in einem Parallelstreifen,
d) zwei diametral entgegengesetzt wirkende gleich große Kräfte im Innern einer Kreisscheibe.

Soweit für diese Fälle Lösungen bereits bekannt sind, werden sie mit den hier gewonnenen Ergebnissen verglichen.

2. Die Gleichungen des ebenen Spannungszustandes. Wird eine Scheibe in der (x, y)-Ebene eines rechtwinkligen kartesischen Koordinatensystems nur durch Kräfte beansprucht, die in der Ebene der Scheibe wirken, so gelten, sofern vom Einfluß des Eigengewichts und damit der Massenkräfte abgesehen wird, bei Verwendung der üblichen Bezeichnung der Spannungskomponenten mit σ_x, σ_y und τ die Gleichgewichtsbedingungen

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau}{\partial y} = 0\,, \qquad \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau}{\partial x} = 0\,. \tag{1}$$

Mit den Verschiebungen ξ, η in der x-, y-Richtung lauten die Gleichungen für die Dehnungen ε_x, ε_y und die Gleitung γ

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{1}{E}\,(\sigma_x - \nu\sigma_y)\,, \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{1}{E}\,(\sigma_y - \nu\sigma_x)\,, \\ \gamma &= \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial \xi}{\partial y} = \frac{1}{G}\,\tau\,. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Hierin sind E der Elastizitätsmodul, G der Schubmodul und ν die Querzahl, die durch die Gleichung $E = 2(1+\nu)\,G$ miteinander verknüpft sind. Die Elimination der Verschiebungen aus (2) liefert die für die Verzerrungskomponenten geltende Verträglichkeitsbedingung

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma}{\partial x\,\partial y}\,.$$

Werden in dieser Gleichung die Verzerrungskomponenten durch die Spannungen nach den Gleichungen (2) und die Schubspannung mit Hilfe (1) durch die Normalspannungen ersetzt, so folgt die Gleichung

$$\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2} = \Delta(\sigma_x + \sigma_y) = 0\,,$$

---

[1] Vgl. etwa *L. Föppl*, Drang und Zwang, Bd. 3. München 1947.

[2] *L. Sobrero*, Memorie della Reale Accademia d'Italia 6 (1934/135), S. 1; oder auch *L. Sobrero*, Theorie der ebenen Elastizität. Hamburger Math. Einzelschriften, Heft 17. Leipzig 1934.

[3] Gekürzte Fassung einer von der Technischen Hochschule Hannover genehmigten Habilitationsschrift (D 89); Referent: Prof. Dr.-Ing. *O. Flachsbart*; Korreferent: Prof. Dr.-Ing. habil. *A. Pflüger*.

die die Verträglichkeitsbedingung durch die Spannungen ausdrückt. Die Elimination von τ aus (1) liefert

$$\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2} = 0 ,$$

womit aus der vorhergehenden Gleichung für σ_x schließlich folgt

$$\frac{\partial^4 \sigma_x}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 \sigma_x}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \sigma_x}{\partial y^4} = \Delta\Delta\sigma_x = 0 .$$

Mit den in gleicher Weise abgeleiteten Gleichungen für σ_y und τ ergeben sich für die Spannungen die drei Bipotentialgleichungen

$$\Delta\Delta\sigma_x = 0 , \qquad \Delta\Delta\sigma_y = 0 , \qquad \Delta\Delta\tau = 0 . \tag{3}$$

3. Das Sobrerosche Verfahren mit hyperkomplexen Funktionen. a) Allgemeine theoretische Grundlagen. Die Größe

$$f = a + jb + j^2 c + j^3 d$$

soll als hyperkomplexe Zahl definiert werden, deren Elemente a, b, c, d beliebige Funktionen der vier reellen Veränderlichen x, y, u, v sind. Die Konstante j und ihre Potenzen sollen die Ordnung der reellen Funktionen innerhalb der hyperkomplexen Größe kennzeichnen; dann ist f eine Funktion der hyperkomplexen Veränderlichen

$$z = x + jy + j^2 u + j^3 v ,$$

d.h. es ist $f = f(z)$. Für den hier interessierenden ebenen Fall verschwinden u und v. Über die Konstante j wird derart verfügt, daß die Differentialgleichung

$$\frac{\partial^4 f}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 f}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 f}{\partial y^4} = 0$$

mit $z = x + jy$ erfüllt ist. Dies führt zu dem Multiplikationsgesetz

$$1 + 2j^2 + j^4 = 0 , \tag{4}$$

das die Potenzen j^4, j^5, ... und höhere durch die ersten vier Potenzen $j^0 = 1$, j, j^2 und j^3 auszudrücken erlaubt. Von Interesse ist weiter die leicht nachzurechnende Relation, die die imaginäre Einheit i mit den hyperkomplexen Termen verknüpft, nämlich

$$i = \pm\sqrt{-1} = \frac{1}{2}(3j + j^3) .$$

Bezüglich des Rechnens mit hyperkomplexen Zahlen und Funktionen sei auf die erläuternden Ausführungen des Anhanges unter Ziffer 6 verwiesen. Die Voraussetzung der Differentiierbarkeit der Funktion f führt zu

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{df}{dz}\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{df}{dz} , \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{df}{dz}\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{df}{dz} j .$$

Die Unabhängigkeit des Differentialquotienten df/dz vom Wege ergibt

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{j}\frac{\partial f}{\partial y}$$

oder

$$a_x + jb_x + j^2 c_x + j^3 d_x = \frac{1}{j}(a_y + jb_y + j^2 c_y + j^3 d_y) ,$$

wobei die Indizes die partiellen Ableitungen kennzeichnen. Diese hyperkomplexe Gleichung liefert vier reelle Gleichungen zwischen den ersten partiellen Ableitungen der Funktionen a, b, c, d. Werden die Elemente gleicher Ordnung mit Hilfe von (4) zusammengefaßt, so folgen die *Cauchy*schen Bedingungen

$$-c_x + d_y = 0 , \quad a_y + d_x = 0 , \quad a_x - b_y = 0 , \quad b_x - c_y - 2d_x = 0 . \tag{5}$$

Werden in diesem Gleichungssystem je drei der Funkionen a, b, c, d eliminiert, so ergeben sich nacheinander aus der jeweiligen vierten übrigbleibenden Gleichung die Bipotentialgleichungen

$$\Delta\Delta a = 0 , \quad \Delta\Delta b = 0 , \quad \Delta\Delta c = 0 ; \quad \Delta\Delta d = 0 . \tag{6}$$

Der Vergleich zwischen den beiden Gleichungen (1) und den ersten beiden Gleichungen (5) zeigt die Äquivalenz zwischen den Beanspruchungskomponenten des Spannungszustandes und dem

ersten, dritten und vierten Element einer Funktion der hyperkomplexen Veränderlichen $z = x + jy$, und zwar gilt

$$\sigma_x \equiv -c, \qquad \sigma_y \equiv a, \qquad \tau \equiv d.$$

Es darf somit gesetzt werden

$$f(z) = \sigma_y + jb - j^2\sigma_x + j^3\tau. \tag{7}$$

Gleichzeitig entsprechen auch die Differentialgleichungen (3) und (6) einander. Dieser Zusammenhang zwischen den Elementen einer hyperkomplexen Funktion und den Spannungskomponenten führt die Lösung spezieller Probleme der ebenen Elastizitätstheorie auf die analytische Aufgabe zurück, eine Funktion $f(z)$ mit $z = x + jy$ eines ebenen Systems zu ermitteln, für die bestimmte Singularitäten und Randbedingungen vorgeschrieben sind.

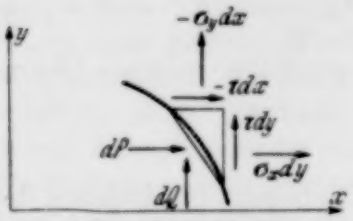


Abb. 1. Zur Gleichgewichtsbetrachtung innerhalb einer Scheibe.

b) Speziellere Ausführungen. Sind innerhalb einer Scheibe für ein Element $dz = dx + j\,dy$ einer Kurve die den elastischen Spannungszustand entsprechenden Komponenten einer Kraft dP und dQ parallel zur x- bzw. y-Achse, so verlangt das Gleichgewicht (vgl. Abb. 1)

$$dP = \tau\,dx - \sigma_x dy, \qquad dQ = \sigma_y dx - \tau\,dy.$$

Dabei sind die beiden Komponenten auf die Dicke der Scheibe bezogen, die gleich der Längeneinheit gesetzt wird. Andererseits stellt die hyperkomplexe Funktion $f(z)$ die elastische Beanspruchung des betreffenden Punktes dar; dies liefert mit Rücksicht auf (7) und Beachtung von (4)

$$\begin{aligned} f(z)\,dz &= (\sigma_y + jb - j^2\sigma_x + j^3\tau)\,(dx + j\,dy) \\ &= (\sigma_y dx - \tau\,dy) + j(\sigma_y dy + b\,dx) + j^2(b\,dy - 2\tau\,dy - \sigma_x dx) + j^3(\tau\,dx - \sigma_x dy). \end{aligned} \tag{8}$$

Das erste und das letzte Element dieser Gleichung entsprechen den Kraftkomponenten dQ und dP. Das Integral $\int f(z)\,dz$ längs eines endlichen Bogens der Kurve entspricht dann den Komponenten Q und P, die infolge des elastischen Spannungszustandes von der einen Kurvenseite auf die andere übertragen werden. Ist der Integrationsweg geschlossen und wirkt innerhalb des eingeschlossenen Bereiches keine äußere Kraft, so hat das Integral den Wert Null. Wird dagegen in das umschlossene Gebiet eine äußere Kraft eingeleitet, die für die Funktion $f(z)$ eine Singularität bedeutet, so verschwindet das Integral $\oint f(z)\,dz$ nicht mehr. Das erste und das letzte Element entsprechen dann den Komponenten Q und P der angreifenden Kraft. Der *Cauchy*sche Satz und der Residuumbegriff behalten damit für die hyperkomplexe Funktion $f(z)$ ihre Gültigkeit. Greift nun im Punkte z_0 eine äußere Kraft mit dem Komponenten P und Q parallel zur x- bzw. y-Achse an, so läßt sich der durch diese Kraft hervorgerufene elastische Spannungszustand durch die Funktion

$$f(z) = \frac{k}{z - z_0}$$

darstellen, wobei k eine willkürliche hyperkomplexe Konstante

$$k = \alpha + j\beta + j^2\gamma + j^3\delta$$

ist; α, β, γ, δ sind dabei reelle Größen. Der Wert I des Integrals längs eines geschlossenen Integrationsweges führt für die gewählte Funktion zu

$$I = \oint f(z)\,dz = 2\pi i k.$$

Einzelheiten über die Auswertung dieses Integrals sind in Gleichung (23) des Anhangs unter Ziffer 6 wiedergegeben. Wird die imaginäre Einheit $i = \frac{1}{2}(3j + j^3)$ gesetzt, so folgt nach einfacher Umformung

$$I = \oint f(z)\,dz = \pi[-(\beta + \delta) + j(3\alpha - \gamma) + j^2(\beta - 3\delta) + j^3(\alpha + \gamma)]. \tag{9}$$

Dieses Ergebnis liefert mit der integrierten Gleichung (8) für die Komponenten der Kraft

$$P = \pi(\alpha + \gamma), \qquad Q = -\pi(\beta + \delta). \tag{10}$$

Die Funktion $f(z)$ entsprach nach Gleichung (7) in ihrem ersten, dritten und vierten Element den Komponenten des elastischen Spannungszustandes. Diese Elemente sind daher physikalisch unmittelbar anschaulich. Dies gilt jedoch nicht für das zweite Element, das durch die Funktion b ausgedrückt wurde; der Zusammenhang zwischen diesem Element und den Spannungskompo-

nenten geht aus Gleichung (5) hervor. Danach ist

$$b_x = c_y + 2d_x = -\frac{\partial \sigma_x}{\partial y} + 2d_x = -\frac{E}{1-\nu^2}\left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial x \partial y} + \nu \frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2}\right) + 2d_x ,$$

$$b_y = a_x = \frac{\partial \sigma_y}{\partial x} = \frac{E}{1-\nu^2}\left(\nu \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial y}\right),$$

wobei die Spannungen durch die Verschiebungen ausgedrückt wurden. Aus den Ausdrücken für b_x und b_y läßt sich nun die Funktion b ermitteln. Aus (1) folgen zunächst unter Beachtung von (2) für die Verschiebungen die Differentialgleichungen

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = -\frac{1}{2}(1-\nu)\frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} - \frac{1}{2}(1+\nu)\frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial y} ,$$

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2} = -\frac{1}{2}(1+\nu)\frac{\partial^2 \xi}{\partial x \partial y} - \frac{1}{2}(1-\nu)\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} ;$$

damit wird

$$b_x = -\frac{1}{2}\frac{E}{1+\nu}\left[(2+\nu)\frac{\partial^2 \xi}{\partial x \partial y} - \nu \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}\right] + 2d_x ,$$

$$b_y = -\frac{1}{2}\frac{E}{1+\nu}\left[\nu \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} - (2+\nu)\frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial y}\right].$$

Integriert folgt

$$b = -\frac{1}{2}\frac{E}{1+\nu}\left[(2+\nu)\frac{\partial \xi}{\partial y} - \nu \frac{\partial \eta}{\partial x}\right] + 2d = -\frac{1}{2}\frac{E}{1+\nu}\left[\nu \frac{\partial \xi}{\partial y} - (2+\nu)\frac{\partial \eta}{\partial x}\right].$$

Dabei sind die auftretenden willkürlichen Funktionen, die hier unwesentlich sind, fortgelassen. Dieses Ergebnis liefert für eine Integration nach (8), wenn $z_1 = \xi_1 + j\eta_1$ ein Punkt mit verschwindenden Verschiebungen sein soll und $z = \xi + j\eta$ ein beliebiger Punkt der Ebene ist,

$$\begin{aligned}
\int_{z_1}^{z} f(z)\,dz = {} & \frac{E}{1+\nu}\int_{z_1}^{z}\left[\frac{1}{1-\nu}\left(\nu \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y}\right)dx - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial \eta}{\partial x}\right)dy\right] + \\
& + j\frac{E}{1+\nu}\int_{z_1}^{z}\left[\frac{1}{1-\nu}\left(\nu \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y}\right)dy - \left(\frac{\nu}{2}\frac{\partial \xi}{\partial y} - \frac{2+\nu}{2}\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)dx\right] + \\
& + j^2\frac{E}{1+\nu}\int_{z_1}^{z}\left[\left(\frac{\nu}{2}\frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{2+\nu}{2}\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)dy - \frac{1}{1-\nu}\frac{\partial \xi}{\partial x} + \nu \frac{\partial \eta}{\partial y}\right)dx\right] + \\
& + j^3\frac{E}{1+\nu}\int_{z_1}^{z}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial \eta}{\partial x}\right)dx - \frac{1}{1-\nu}\left(\frac{\partial \xi}{\partial x} + \nu \frac{\partial \eta}{dy}\right)dy\right].
\end{aligned} \tag{11}$$

Aus dieser Gleichung lassen sich nun die Verschiebungen $(\xi - \xi_1)$ und $(\eta - \eta_1)$ ableiten. Da für die Verschiebung in x-Richtung nur das erste und dritte Element der rechten Seite von (11) Beiträge liefern, muß ein hyperkomplexer Multiplikator $A + j^2 B$, wobei A und B reelle Zahlen sind, für die Gleichung (11) so bestimmt werden, daß für das erste Element das totale Differential

$$d\xi = \frac{\partial \xi}{\partial x}dx + \frac{\partial \xi}{\partial y}dy$$

entsteht. Diese Bedingung führt zu der Gleichung

$$d\xi = \left(\frac{\nu}{1-\nu}A + \frac{1}{1-\nu}B\right)\frac{\partial \xi}{\partial x}dx - \left(\frac{1}{2}A - \frac{2+\nu}{2}B\right)\frac{\partial \xi}{\partial y}dy ,$$

die $A = -\frac{\nu}{1-\nu}$ und $B = \frac{1}{1-\nu}$ liefert.

Die Verschiebung in x-Richtung ergibt nunmehr das erste Element der Gleichung

$$\frac{1}{E}(-\nu + j^2)\int_{z_1}^{z} f(z)\,dz = \xi - \xi_1 + \cdots . \tag{12a}$$

Wird in entsprechender Weise Gleichung (11) mit $C + j^2 D$ multipliziert, um das totale Differential

$j\,d\eta$, für das jetzt nur das zweite und vierte Element von (11) Beiträge liefern, zu erhalten, so nehmen die reellen Konstanten C und D die Werte

$$C = \frac{1}{1+\nu}, \qquad D = -\frac{\nu}{1+\nu}$$

an. Die Verschiebung in y-Richtung folgt dann aus dem zweiten Element:

$$\frac{1}{E}(1-j^2\nu)\int_{z_1}^{z} f(z)\,dz = \cdots + j(\eta-\eta_1)\cdots. \tag{12b}$$

Mit den beiden Gleichungen (12a) und (12b) lassen sich die Verschiebungskomponenten errechnen. Weiter folgen damit für die reellen Größen $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ der hyperkomplexen Konstanten k die Beziehungen, die zwischen diesen Größen untereinander bestehen. Werden nämlich in (12a) und (12b) die Integrationen über eine geschlossene Kurve erstreckt, so müssen die Verschiebungen $\xi - \xi_1$ und $\eta - \eta_1$ verschwinden. Dies führt mit Hilfe von (9) zu den Gleichungen

$$\beta(1-\nu) - \delta(3+\nu) = 0, \qquad \alpha(3+\nu) - \gamma(1-\nu) = 0.$$

Mit Gleichung (10) ergibt sich schließlich die Abhängigkeit der Größen $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ von den Komponenten P und Q einer äußeren Kraft aus

$$\alpha = \frac{1-\nu}{4\pi}P, \qquad \beta = -\frac{3+\nu}{4\pi}Q, \qquad \gamma = \frac{3+\nu}{4\pi}P, \qquad \delta = -\frac{1-\nu}{4\pi}Q.$$

Damit ist die hyperkomplexe Funktion $f(z) = k/(z - z_0)$, die den elastischen Spannungszustand für eine im Punkt z_0 angreifende Kraft mit den Komponenten P und Q in x- und y-Richtung darstellt, vollständig bestimmt. Mit den Ergebnissen für $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ nimmt die hyperkomplexe Konstante k den Wert

$$k = \frac{P}{4\pi}[(1-\nu) + j^2(3+\nu)] - \frac{Q}{4\pi}[j(3+\nu) + j^3(1-\nu)] \tag{13}$$

an, wobei besonders hervorzuheben ist, daß die zugrunde gelegte Singularität einen Pol ersten Grades besitzt.

c) Das Prinzip der analytischen Spiegelung. Für die Anwendung auf spezielle Probleme ist das Verhalten der Funktion $f(z)$ am Rande eines ebenen Systems von besonderem Interesse. Wird z. B. ein freier Randteil betrachtet, der zur x-Achse parallel verläuft und an dem keine äußeren Kräfte angreifen, so verschwinden in den Punkten dieses Randes die Spannungen σ_y und τ, d. h. die Funktion $f(z)$ darf hier nur aus dem zweiten und dritten Element von (7) bestehen. Im Hinblick auf zu lösende Randwertaufgaben wird zum Aufbau einer Funktion $f_0(z)$, die in der oberen Halbebene des (x, y)-Systems im Punkte $z_0 = j\,a$, a sei eine gegebene reelle Zahl, einen Pol besitzen möge, die Singularität vom Typ $1/(z - j\,a)$ vorgegeben; dabei ist zunächst der Zähler, der im allgemeinen eine hyperkomplexe Konstante sein wird, gleich der reellen Einheit 1 gesetzt. Um die Funktion $f_0(z)$ zu bestimmen, liegt es nahe, sich der Methoden der Potentialtheorie in analoger Weise zu bedienen. Befindet sich nämlich eine Einheitsmasse im Punkte $z_0 = j\,a$ des Feldes und wird weiter längs der reellen Achse eine Massenbelegung, die durch eine unbekannte hyperkomplexe Funktion $\mu(x)$ darstellbar sei, angenommen, so ist das „Potential" dieser Massen

$$f_0(z) = \frac{1}{z - j\,a} + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mu(x)}{z-x}\,dx.$$

Für einen Punkt ζ der reellen Achse nimmt mit $z \to \zeta$ die Funktion $f_0(z)$ den Wert

$$f_0(\zeta) = \frac{1}{\zeta - j\,a} + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mu(x)-\mu(\zeta)}{\zeta - x}\,dx + \mu(\zeta)\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{\zeta - x}$$

an. Da die Funktion $\mu(x)$ auf der x-Achse nur zweite und dritte Elemente enthalten soll, wird auch der mittlere Term dieser Gleichung nur aus solchen bestehen. Für einen Ansatz

$$\mu(x) = jA(x) + j^2 B(x)$$

genügt es dann, die reellen Funktionen $A(x)$ und $B(x)$ derart zu bestimmen, daß das erste und letzte Glied der Gleichung die vorgeschriebene Randbedingung, keine ersten und vierten Ele-

mente zu enthalten, erfüllen. Aus

$$\frac{1}{\zeta - j\,a} - \mu(\zeta)\ln(\zeta - x)\Big|_{x\to-\infty}^{x\to+\infty} = \frac{1}{\zeta - j\,a} - \mu(\zeta)\,i\,\pi$$

folgen damit für den Ansatz $\mu(\zeta) = jA(\zeta) + j^2 B(\zeta)$ und der in seine Elemente zerlegten Funktion $1/(\zeta - j\,a)$ unter Beachtung von

$$\pi\frac{1}{2}(3j + j^3)\,\mu(\zeta) = \frac{\pi}{2}(-A - jB + j^2 A + j^3 B)$$

die Gleichungen

$$\frac{\zeta}{\zeta^2 + a^2} + \frac{\zeta a^2}{(\zeta^2 + a^2)^2} + \frac{\pi}{2}A = 0\,, \qquad \frac{a^3}{(\zeta^2 + a^2)^2} - \frac{\pi}{2}B = 0\,.$$

Nach Eliminierung von A und B ergibt sich

$$\mu(x) = jA(x) + j^2 B(x) = -j\frac{2}{\pi}\left[\frac{x}{x^2 + a^2} + \frac{a^2(x - j\,a)}{(x^2 + a^2)^2}\right]$$

und weiter

$$f_0(z) = \frac{1}{z - j\,a} - j\frac{2}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\frac{x}{(x^2 + a^2)(z - x)} + \frac{a^2(x - j\,a)}{(x^2 + a^2)^2(z - x)}\right]dx\,.$$

Die Integration kann mittels Partialbruchzerlegung oder bequemer mit Hilfe des Residuensatzes ausgeführt werden.

Wird nämlich statt x vorübergehend die im allgemeinen aus vier Elementen bestehende hyperkomplexe Veränderliche w eingeführt und der Integrationsweg auf der reellen Achse durch einen Halbkreis derart geschlossen, daß die reelle Achse und ein vorgegebener singulärer Punkt $w = w_0$ eine im vierdimensionalen Raum liegende Ebene festlegen, so gibt die Integration auf dem in dieser Ebene liegenden Halbkreis keinen Beitrag, da für beide Terme des Integranden der Nenner von höherem Grad ist als der Zähler. Unter Beachtung der beiden singulären Punkte $w_0 = z$ und $w_0 = \frac{1}{2}(3j + j^3)a = i\,a$ liefert der Residuensatz für den ersten Term

$$\text{Res}\,f_I(w)_{w_0 = z} = -\frac{z}{z^2 + a^2} \qquad \text{und} \qquad \text{Res}\,f_I(w)_{w_0 = i\,a} = \frac{i\,a}{2\,i\,a(z - i\,a)} = \frac{1}{2}\frac{z + i\,a}{z^2 + a^2}\,.$$

Der zweite Term des Integranden wird an denselben Punkten singulär. Das Residuum bei $w_0 = z$ nimmt den Wert an

$$\text{Res}\,f_{II}(w)_{w_0 = z} = a^2\frac{j\,a - z}{(z^2 + a^2)^2}\,.$$

Zur Berechnung des Residuums an der Stelle $w_0 = i\,a$ wird eine Potenzreihenentwicklung für die ein wenig umgeformte Funktion

$$\frac{a^3(j - i) - a^2(w - i\,a)}{(w - i\,a)^2\,[(w + i\,a)^2(w - z)]}$$

durchgeführt. Die Entwicklung der eckigen Klammer im Nenner führt mit

$$f(i\,a) = 4a^2(z - i\,a) \qquad \text{und} \qquad f'(i\,a) = 2(2\,i\,a)(i\,a - z) + (2\,i\,a)^2$$

zu der Darstellung

$$(w + i\,a)^2(w - z)\,|_{w_0 = i\,a} = f(i\,a) + \frac{f'(i\,a)}{1!}(w - i\,a) = 4a^2(z - i\,a)\left[1 - \frac{i\,z + 2a}{a(z - i\,a)}(w - i\,a)\right]$$

und damit zu dem Residuum

$$\text{Res}\,f_{II}(w)_{w_0 = i\,a} = \frac{1}{2\,\pi\,i}\oint\frac{a^3(j - i) - a^2(w - i\,a)}{(w - i\,a)^2\,4a^2(z - i\,a)}\left[1 + \frac{i\,z + 2a}{a(z - i\,a)}(w - i\,a)\right]dw$$

$$= \frac{(j - i)(i\,z + 2a)}{4(z - i\,a)^2} - \frac{1}{4(z - i\,a)}\,.$$

Zusammengefaßt ergibt sich für das Integral

$$2\,\pi\,i\sum\text{Res} = -\frac{\pi}{2}\frac{a + (2\,i + j)z}{z^2 + a^2} + \pi a^2\frac{(i\,j - 1)a - (i + j)z}{(z^2 + a^2)^2}\,.$$

Somit wird

$$f_0(z) = \frac{1}{z-ja} - \frac{z}{z^2+a^2} - \frac{a^2 z}{(z^2+a^2)^2} + j\left[\frac{a}{z^2+a^2} + \frac{3a^3}{(z^2+a^2)^2}\right] + j^2\left[\frac{2z}{z^2+a^2} + \frac{3a^2 z}{(z^2+a^2)^2}\right] - j^3 \frac{a^3}{(z^2+a^2)^2}.$$

Da die Funktion $f_0(z)$ in der oberen Halbebene nur im Punkte $z = ja$ einen Pol haben kann, liegt die Vermutung nahe, daß sich das Ergebnis mit Hilfe von Funktionen, die in der unteren Halbebene Pole besitzen, umformen läßt. Ein Ansatz mit hyperkomplexen Konstanten führt durch Koeffizientenvergleich zu

$$f_0(z) = \frac{1}{z-ja} + \frac{2j^2-1}{z+ja} + 2a\frac{j^3}{(z+ja)^2} - 2a^2\frac{1+j^2}{(z+ja)^3}.$$

Dieses Resultat findet in der Potentialtheorie eine gewisse Analogie in dem „*Schwarz*sche Spiegelungsprinzip", mit dessen Hilfe sich bekanntlich durch Hinzunahme von zum Rande symmetrisch aufgebauten Funktionen vorgegebene Randbedingungen erfüllen lassen. Aus der letzten Gleichung ist ersichtlich, daß dem Pol ersten Grades der Funktion $1/(z-ja)$ im symmetrischen Punkte ein Pol vom dritten Grade zugeordnet werden muß, um die Randbedingungen auf der x-Achse zu befriedigen. Das in der komplexen Funktionentheorie benutzte Spiegelungsprinzip erhält somit hier eine erweiterte Fassung. Für die Anwendungen der Theorie sind weiter die Funktionen von Bedeutung, die im Punkte $z = ja$ einen Pol ersten Grades besitzen, wenn die Singularitäten innerhalb der Scheibe durch die Funktionen

$$\frac{j}{z-ja}, \quad \frac{j^2}{z-ja} \quad \text{und} \quad \frac{j^3}{z-ja}$$

vorgegeben sind und weiter verlangt wird, daß auf der reellen Achse das erste und das letzte Element verschwinden sollen. Die Durchführung der Rechnung erfolgt in gleicher Weise wie die bei der Singularität $1/(z-ja)$; es soll daher hier nur das Ergebnis der Rechnung zusammengestellt werden:

$$\left.\begin{aligned}
f_0(z) &= \frac{1}{z-ja} + \frac{2j^2-1}{z+ja} + 2a\frac{j^3}{(z+ja)^2} - 2a^2\frac{1+j^2}{(z+ja)^3},\\
f_1(z) &= \frac{j}{z-ja} + \frac{j}{z+ja} + 2a\frac{j^2}{(z+ja)^2} + 2a^2\frac{j+j^3}{(z+ja)^3},\\
f_2(z) &= \frac{j^2}{z-ja} + \frac{j^2}{z+ja} + 2a\frac{j}{(z+ja)^2} + 2a^2\frac{1+j^2}{(z+ja)^3},\\
f_3(z) &= \frac{j^3}{z-ja} + \frac{2j-j^3}{z+ja} + 2a\frac{1}{(z+ja)^2} - 2a^2\frac{j+j^3}{(z+ja)^3}.
\end{aligned}\right\} \qquad (14)$$

Mit Hilfe dieser Gleichungen gelingt es, lineare Kombinationen mit reellen Koeffizienten dieser Funktionen anzugeben, die im Punkte $x=0$, $y=a$ der (x, y)-Ebene eine Singularität ersten Grades besitzen und auf der x-Achse nur zweite und dritte Elemente enthalten.

4. Lösung spezieller Spannungsprobleme. a) Punktlast in der unendlich ausgedehnten Scheibe. In der unendlich ausgedehnten Ebene einer Scheibe greife im Punkte $x=0$, $y=0$ des Koordinatensystems eine Kraft P an, deren Wirkungslinie mit der negativen Halbachse von x zusammenfällt (vgl. Abb. 2). Die Kraft P ist wieder auf die Dicke der Scheibe bezogen, die gleich der Längeneinheit gesetzt sei. Die dieser Kraft das Gleichgewicht haltenden äußeren Kräfte sollen im Unendlichen liegen und sind daher für den Spannungszustand im Endlichen bedeutungslos. Nach den Ausführungen des vorhergehenden Abschnittes kann der durch P hervorgerufene Spannungszustand durch die Funktion $f(z) = k/z$ mit der hyperkomplexen Veränderlichen $z = x + jy$ beschrieben werden. Nach Gleichung (13) ist die hyperkomplexe Konstante für die hier vorliegende Belastung

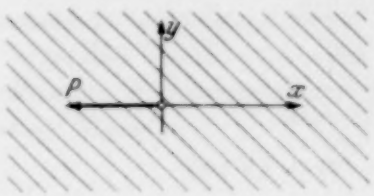


Abb. 2. Last in der Vollscheibe.

$$k = -\frac{P}{4\pi}[(1-\nu) + j^2(3+\nu)].$$

Damit wird nach Gleichung (7) die Spannungsfunktion

$$f(z) = \sigma_y + jb - j^2\sigma_x + j^3\tau = -\frac{P}{4\pi}\frac{(1-\nu) + j^2(3+\nu)}{x+jy},$$

deren Aufspaltung mit Hilfe (22) die bekannten Werte der Spannungen[1] liefert.

[1] Vgl. etwa *K. Girkmann*, Ing.-Arch. 11 (1940), S. 418 oder auch *K. Girkmann*, Flächentragwerke, S. 108, 2. Aufl. Wien 1948.

Die Komponenten ξ und η der Verschiebung eines Punktes der (x, y)-Ebene berechnen sich nach den Gleichungen (12a) und (12b). Danach wird

$$\xi - \xi_1 + \cdots = \frac{1}{E}(-\nu + j^2)\int_{z_1}^{z} f(z)\,dz = \frac{1}{E}(-\nu + j^2)\,k \ln z \Big|_{z_1}^{z}.$$

Nach Einsetzung des oben angegebenen Wertes für k und der Zerlegung des Logarithmus in seine Elemente nach Gleichung (23) dürfen nur die reellen Terme herangezogen werden. Die Zusammenfassung liefert

$$\xi - \xi_1 = \frac{P}{4\pi}\frac{1+\nu}{E}\left[(1+\nu)\frac{y^2}{x^2+y^2} + \frac{3-\nu}{2}\ln(x^2+y^2)\right].$$

In entsprechender Weise ergibt sich für die Komponente der Verschiebung in y-Richtung

$$\eta - \eta_1 = -\frac{P}{4\pi}\frac{(1+\nu)^2}{E}\frac{xy}{x^2+y^2};$$

dabei sind ξ_1 und η_1 Integrationskonstanten, die eine Verschiebung der Scheibe als Ganzes berücksichtigen. Die beiden erhaltenen Ausdrücke stimmen mit den Angaben von *A.* und *L. Föppl*[1] überein.

b) Punktlast im Innern einer Halbscheibe. Der Rand der Scheibe falle mit der x-Achse zusammen, so daß die obere Halbebene die Halbscheibe darstellt. Im Abstand a vom Koordinatenursprung (vgl. Abb. 3) liege auf der y-Achse der Angriffspunkt der äußeren Last, die in zwei Komponenten parallel zu den Koordinatenachsen zerlegt werde. Die Komponente P sei parallel zum Rand gerichtet und weise wieder in die Richtung der negativen x-Achse; die zum Rand senkrecht verlaufende Komponente Q falle in die Richtung der negativen y-Achse. Mit Hilfe der Ergebnisse unter Ziffer 3 läßt sich die hyperkomplexe Funktion $f(z)$, aus der die durch die Komponenten P und Q im Punkte $z = ja$ hervorgerufene elastische Beanspruchung abgeleitet wird, in einfacher Weise angeben. Unter Berücksichtigung der für die Komponenten gewählten Richtungen wird mit (13) und der durch (14) eingeführten Bezeichnungen die Spannungsfunktion

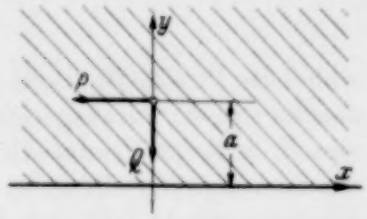


Abb. 3. Last in der Halbscheibe.

$$f(z) = -\frac{P}{4\pi}\left[(1-\nu)f_0(z) + (3+\nu)f_2(z)\right] + \frac{Q}{4\pi}\left[(3+\nu)f_1(z) + (1-\nu)f_3(z)\right].$$

Die Aufspaltung dieser Gleichung in ihre vier Elemente liefert die Werte der Spannungen, die im Einklang mit den Ergebnissen von *E. Melan*[2] und *K. Girkmann*[3] stehen.

c) Punktlast in einem Parallelstreifen. In einem unendlich langen Parallelstreifen von der Breite a greife parallel zu den Rändern eine Kraft Q an. Der Ursprung des Koordinatensystems falle mit dem Angriffspunkt der Kraft zusammen; Q wirke in Richtung der negativen y-Achse (vgl. Abb. 4). Die Abstände der y-Achse vom rechten und linken Rand seien durch die Längen a_1 und a_2 gekennzeichnet. Die Aufgabe besteht nun darin, die Spannungsfunktion anhand der allgemeinen Ausführungen unter Ziffer 3 aufzubauen. Danach sind im Koordinatenanfangspunkt Pole ersten Grades anzunehmen, die durch die Funktionen $1/z$, j/z, j^2/z und j^3/z dargestellt werden. Für den rechten Rand $x = a_1$ wird weiter verlangt, daß die Spannungen σ_x und τ verschwinden. Zur Erfüllung dieser Randbedingungen ist auf der x-Achse im Punkte $x = 2a_1$ ein Pol dritten Grades einzuführen; die Koeffizienten der dadurch bedingten Funktionen sind derart zu bestimmen, daß die dritten und vierten Elemente für den Rand $x = a_1$ Null werden. Das Ergebnis der Rechnung ist in dem Gleichungssystem (15) zusammengestellt.

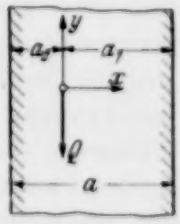


Abb. 4. Last in einer streifenförmigen Scheibe.

Wird nun auch für den linken Rand $x = -a_2$ verlangt, daß die dritten und vierten Elemente verschwinden, so lassen sich aus (15) vier analoge Gleichungen entwickeln, indem für a_1 der Wert $-a_2$ eingefügt wird. Ein Vergleich zwischen (15) und (14) zeigt den einfacheren Aufbau der Gleichungen (15); die durch Spiegelung erhaltenen Terme in (15) weisen nämlich in den Zählern nur

[1] *A.* und *L. Föppl*, Drang und Zwang, Bd. 1, S. 273. München und Berlin 1941.
[2] *E. Melan*, Z. angew. Math. Mech. 12 (1932), S. 345 und 20 (1940), S. 368.
[3] *K. Girkmann*, Ing.-Arch. 11 (1940), S. 424 und S. 422.

jeweils zwei verschiedene Elemente der Koeffizienten auf, während in (14) drei verschiedene Elemente auftreten. Für die weitere Darstellung bedeutet dies eine wesentliche Vereinfachung.

$$\left.\begin{aligned} f_0(z) &= \frac{1}{z} + \frac{2j^2-1}{z-2a_1} + 2a_1\frac{1+2j^2}{(z-2a_1)^2} + 2a_1^2\frac{1+j^2}{(z-2a_1)^3}\,, \\ f_1(z) &= \frac{j}{z} + \frac{j}{z-2a_1} - 2a_1\frac{j^3}{(z-2a_1)^2} - 2a_1^2\frac{j+j^3}{(z-2a_1)^3}\,, \\ f_2(z) &= \frac{j^2}{z} + \frac{j^2}{z-2a_1} - 2a_1\frac{j^2}{(z-2a_1)^2} - 2a_1^2\frac{1+j^2}{(z-2a_1)^3}\,, \\ f_3(z) &= \frac{j^3}{z} + \frac{2j-j^3}{z-2a_1} - 2a_1\frac{j}{(z-2a_1)^2} + 2a_1^2\frac{j+j^3}{(z-2a_1)^3}\,. \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

Im folgenden soll die Spannungsfunktion $f(z)$, die die von der Kraft Q bewirkte Spannungsverteilung angibt, aufgebaut werden. Nach Gleichung (13) ist die hyperkomplexe Konstante für diese Belastung

$$k = \frac{Q}{4\pi}\left[j(3+\nu) + j^3(1-\nu)\right].$$

Im Koordinatenanfangspunkt ist somit von den Singularitäten j/z und j^3/z auszugehen. Werden nun mit $F_1(z)$ bzw. $F_3(z)$ die hyperkomplexen Funktionen bezeichnet, die im Punkte $x=0$, $y=0$ wie j/z bzw. j^3/z einen Pol ersten Grades haben und deren dritte und vierte Elemente an den beiden Rändern $x=a_1$, $x=-a_2$ verschwinden, so gilt

$$F_1(z) = \frac{j}{z} + \cdots, \qquad F_3(z) = \frac{j^3}{z} + \cdots,$$

wobei die Punkte die noch zu entwickelnden Funktionen zur Erfüllung der Randbedingungen andeuten sollen; vorausgesetzt ist, daß die Art der Lastaufnahme im Unendlichen nach der schon von *B. de Saint-Vénant* erkannten Erfahrungstatsache die Spannungsverteilung in der Umgebung der Lastangriffsstelle nicht stört. Die durch die Kraft Q in dem Parallelstreifen auftretende Spannungsverteilung läßt sich dann durch die hyperkomplexe Spannungsfunktion

$$f(z) = \frac{Q}{4\pi a}\left[(3+\nu)\underset{\lambda_1,\,\lambda_2}{F_1}(\bar{z}) + (1-\nu)\underset{\lambda_1,\,\lambda_2}{F_3}(z)\right] \tag{16}$$

wiedergegeben unter Einführung der dimensionslosen Veränderlichen $\bar{z} = \bar{x} + j\bar{y} = z/a$. Die eingeführten Indizes kennzeichnen die Abhängigkeit von den Verhältnissen $\lambda_1 = a_1/a$ bzw. $\lambda_2 = a_2/a$.

Zum Aufbau der Funktion $F_1(\bar{z})$ wird zunächst die Funktion $f_1(\bar{z})$ von (15) herangezogen. Die Spiegelung der Funktion $j/\bar{z}$ am rechten und linken Rande liefert für die erste Näherung der gesuchten Funktion

$$\underset{\lambda_1,\,\lambda_2}{F_1}(\bar{z}) = \frac{j}{\bar{z}} + \frac{j}{\bar{z}\mp 2\lambda_{\frac{1}{2}}} \mp 2\lambda_{\frac{1}{2}}\frac{j^3}{(\bar{z}\mp 2\lambda_{\frac{1}{2}})^2} - 2\lambda_{\frac{1}{2}}^2\frac{j+j^3}{(\bar{z}\mp 2\lambda_{\frac{1}{2}})^3} + \cdots.$$

In dieser Gleichung sind der Kürze halber die neu aufgenommenen Funktionen zusammengefaßt, und zwar kennzeichnen die oberen (unteren) Vorzeichen und Indizes die durch Spiegelung am rechten (linken) Rande erhaltenen Funktionen. Die im Punkte $\bar{x} = 2\lambda_1$ bzw. $-2\lambda_2$ auf der $\bar{x}$-Achse singulär werdenden Funktionen rufen am linken bzw. rechten Rand eine Störung der Randbedingungen hervor, die eine erneute Spiegelung erfordern. Diese führt zur Bildung der zweiten Näherung für $F_1(\bar{z})$, die durch Aufnahme von weiteren Funktionen, die auf der $\bar{x}$-Achse in den beiden Punkten $x = \pm 2(\lambda_1+\lambda_2) = \pm 2$ singulär werden, entsteht. Dabei sind die vier neu hinzugekommenen Funktionen der ersten Näherung einzeln zu spiegeln. So liefert beispielsweise der Term $j/(\bar{z}-2\lambda_1)$ mit Hilfe der zweiten Gleichung von (15) unter Beachtung des Ortes des vorgegebenen Poles den Ausdruck

$$\frac{j}{\bar{z}+2} + 2(1+\lambda_1)\frac{j^3}{(\bar{z}+2)^2} - 2(1+\lambda_1)^2\frac{j+j^3}{(\bar{z}+2)^3}.$$

Sollen Funktionen höherer Ordnung in gleicher Weise gespiegelt werden, so sind — *L. Sobrero*[1] wies bereits darauf hin — die Gleichungen (15) zu differentiieren, woraus sich dann die gesuchten Beziehungen ergeben. Die beispielsweise für die vorgegebene Funktion $j^3/(\bar{z}-2\lambda_1)^2$ anzuschreibenden Terme folgen aus der dritten Gleichung von (15) mit

$$\frac{j^3}{(\bar{z}+2)^2} + 4(1+\lambda_1)\frac{j^3}{(\bar{z}+2)^3} - 6(1+\lambda_1)^2\frac{j+j^3}{(\bar{z}+2)^4}.$$

[1] a. a. O. in der deutschen Übersetzung S. 28.

Sind alle Funktionen, die in den Punkten $\bar{x} = \pm 2\lambda_{\frac{1}{2}}$ auf der x-Achse singulär werden, in dieser Weise gespiegelt, so ergibt dies zusammengefaßt

$$+\frac{j}{\bar{z}\mp 2}\mp 2\frac{\bar{j}^3}{(\bar{z}\mp 2)^2}-2\frac{j(1+2\lambda_{\frac{1}{1}}^2)+\bar{j}^3(1+6\lambda_{\frac{1}{1}}^2)}{(\bar{z}\mp 2)^3}\mp 6\frac{j(2\lambda_{\frac{1}{1}}^2+2\lambda_{\frac{1}{2}}^2)+\bar{j}^3(2\lambda_{\frac{1}{1}}^2+2\lambda_{\frac{1}{2}}^2)}{(\bar{z}\mp 2)^4}\,.$$

Dieser Ausdruck zusammen mit der oben genannten ersten Näherung stellt für $F_1(\bar{z})$ die zweite Näherung dar. Die neu hinzugekommenen Funktionen, die ihrerseits wieder die vorgegebenen Randbedingungen stören, werden erneut gespiegelt; dadurch werden Polynome aufgebaut, die auf der $\bar{x}$-Achse in den Punkten $\bar{x}=\pm 2(1+\lambda_{\frac{1}{2}})$ singulär werden. Auf eine Angabe dieser Funktionen darf verzichtet werden; sie bilden mit den bereits angeschriebenen die dritte Näherung für $F_1(\bar{z})$. Hervorgehoben sei nur noch, daß die zweite Näherung einen Pol vierten Grades, die dritte Näherung einen Pol fünften Grades enthält usf. Die Fortführung des Verfahrens liefert für die Spannungsfunktion $F_1(\bar{z})$ eine Reihenentwicklung, deren Besonderheit darin besteht, daß jede weitere Näherung einen Term mehr besitzt als die vorhergehende. Ein Vergleich der einzelnen Näherungen untereinander zeigt einen gesetzmäßigen Zusammenhang zwischen den Näherungen ungerader Nummer und denen gerader Nummer, und zwar bilden die Zähler der Funktionen gleicher Potenz in den aufeinanderfolgenden Näherungen jeweils eine arithmetische Reihe. Diese Tatsache vereinfacht die Berechnung der Näherungen höherer Ordnung wesentlich; sie ermöglicht außerdem die zusammengefaßte Darstellung der Funktion

$$\begin{aligned}
F_1(\bar{z})_{\lambda_{\frac{1}{2}}} = {} & \frac{j}{\bar{z}}+\sum_{\substack{m=\\1,3,\cdots}}\frac{j}{\bar{z}\mp\left[(m-1)+2\lambda_{\frac{1}{2}}\right]}+\sum_{\substack{m=\\2,4,\cdots}}\frac{j}{\bar{z}\mp m}\mp \\
\mp\sum_{\substack{m=\\1,3,\cdots}}\sum_{\substack{n=\\2,4,\cdots}}\frac{2^{n-2}}{(\bar{z}\mp\left[(m-1)+2\lambda_{\frac{1}{2}}\right])^n}\frac{\left(\frac{m+n-3}{2}\right)!}{\left(\frac{m-n+1}{2}\right)!}&\left\{\begin{array}{l} j(n-2)\left[m-\frac{1}{2}(n-1)(1-2\lambda_{\frac{1}{2}})\right] \\ +j^3(n-1)\left[m-\frac{n}{2}(1-2\lambda_{\frac{1}{2}})\right]\end{array}\right\}- \\
-\sum_{\substack{m=\\1,3,\cdots}}\sum_{\substack{n=\\3,5,\cdots}}\frac{2^{n-3}}{(\bar{z}\mp\left[(m-1)+2\lambda_{\frac{1}{2}}\right])^n}\frac{\left(\frac{m+n-4}{2}\right)!}{\left(\frac{m-n+2}{2}\right)!}&\left\{\begin{array}{l} j(n-2)\left[+m^2-(n-2)^2+\frac{1}{4}(n-1)(2n-5)\right. \\ \quad\left.-\frac{1}{2}(n-1)(m-1)(1-2\lambda_{\frac{1}{2}})\right. \\ \quad\left.-\frac{1}{4}(n-1)\left[1-(2\lambda_{\frac{1}{2}})^2\right]\right] \\ +j^3(n-1)\left[+m^2-(n-2)^2+\frac{1}{4}(n-2)(2n-5)\right. \\ \quad\left.-\frac{1}{2}(n-2)(m-1)(1-2\lambda_{\frac{1}{2}})\right. \\ \quad\left.-\frac{1}{4}(n-2)\left[1-(2\lambda_{\frac{1}{2}})^2\right]\right]\end{array}\right\}\mp \\
\mp\sum_{\substack{m=\\2,4,\cdots}}\sum_{\substack{n=\\2,4,\cdots}}\frac{2^{n-3}}{(\bar{z}\mp m)^n}\frac{\left(\frac{m+n-4}{2}\right)!}{\left(\frac{m-n+2}{2}\right)!}&\left\{\begin{array}{l} j(n-2)\left[+m^2-(n-2)^2+\frac{1}{4}(n-1)(2n-5)\right. \\ \quad\left.-\frac{1}{2}(n-1)(m-1)(1-2\lambda_{\frac{2}{1}})\right. \\ \quad\left.-\frac{1}{4}(n-1)\left[1-(2\lambda_{\frac{2}{1}})^2\right]\right] \\ +j^3(n-1)\left[+m^2-(n-2)^2+\frac{1}{4}(n-2)(2n-5)\right. \\ \quad\left.-\frac{1}{2}(n-2)(m-1)(1-2\lambda_{\frac{2}{1}})\right. \\ \quad\left.-\frac{1}{4}(n-2)\left[1-(2\lambda_{\frac{2}{1}})^2\right]\right]\end{array}\right\}- \\
-\sum_{\substack{m=\\2,4,\cdots}}\sum_{\substack{n=\\3,5,\cdots}}\frac{2^{n-2}}{(\bar{z}\mp m)^n}\frac{\left(\frac{m+n-3}{2}\right)!}{\left(\frac{m-n+1}{2}\right)!}&\left\{\begin{array}{l} j(n-2)\left[m-\frac{1}{2}(n-1)(1-2\lambda_{\frac{2}{1}})\right] \\ +j^3(n-1)\left[m-\frac{n}{2}(1-2\lambda_{\frac{2}{1}})\right]\end{array}\right\},\ (n\leq m+2);
\end{aligned}\tag{17}$$

dabei sind wieder obere bzw. untere Vorzeichen und Indizes einander zuzuordnen. Auf eine noch straffere Zusammenfassung des Ergebnisses wurde im Interesse der Deutlichkeit verzichtet. Der Gedanke liegt nahe, durch Umordnen der einzelnen Glieder der Näherungen untereinander zu einer geschlosseneren Darstellung oder gar zu Funktionen zu gelangen, die denen der komplexen Theorie analog sind. In Anbetracht der technischen Fragestellung der vorliegenden Arbeit soll hierauf jedoch nicht weiter eingegangen werden. Bezüglich der Konvergenzfrage der erhaltenen Reihe genügt der Hinweis, daß die Reihe auf Grund des Prinzipes der analytischen Fortsetzung konvergiert. Die Anzahl der erforderlichen Näherungen für eine vorgegebene Genauigkeit bei der numerischen Anwendung der Reihe läßt sich aus den Beiträgen ersehen, die die höheren Näherungen liefern.

In gleicher Weise wird die Funktion $F_{3\,\lambda_1,\lambda_2}(\bar{z})$ für (16) entwickelt. Die Spiegelung der Funktion $j^3/\bar{z}$ an den beiden Rändern liefert für die erste Näherung

$$F_{3\,\lambda_1}(\bar{z}) = \frac{j^3}{\bar{z}} + \frac{2j - j^3}{\bar{z} \mp 2\lambda_1} \mp 2\lambda_1 \frac{j}{(\bar{z} \mp 2\lambda_1)^2} + 2\lambda_1^2 \frac{j + j^3}{(\bar{z} \mp 2\lambda_1)^3} + \cdots .$$

Die Spiegelung der in den Punkten $\bar{x} = \pm 2\lambda_1$ singulär werdenden Funktionen führt zu

$$+ \frac{j^3}{\bar{z} \mp 2} \pm 2\frac{j - 2j^3}{(\bar{z} \mp 2)^3} - 2\frac{j(3 + 2\lambda_1^2) + j^3(3 - 2\lambda_1^2)}{(\bar{z} \mp 2)^5} \mp 6\frac{j(-2\lambda_1 - 2\lambda_1^3) + j^3(-2\lambda_1 - 2\lambda_1^3)}{(\bar{z} \mp 2)^4};$$

dieser Ausdruck liefert mit der ersten Näherung zusammen für die gesuchte Funktion die zweite Näherung. Die Fortsetzung des Verfahrens führt schließlich zu der folgenden Reihenentwicklung

$$\begin{aligned}
F_{3\,\lambda_1}(\bar{z}) = {} & \frac{j^3}{\bar{z}} + \sum_{\substack{m= \\ 1,3,\cdots}} \frac{2j - j^3}{\bar{z} + [(m-1) + 2\lambda_1]} + \sum_{\substack{m= \\ 2,4,\cdots}} \frac{j^3}{\bar{z} \mp m} \mp \\
& \mp \sum_{\substack{m= \\ 1,3,\cdots}} \sum_{\substack{n= \\ 2,4,\cdots}} \frac{2^{n-2}}{(\bar{z} \mp [(m-1) + 2\lambda_1])^n} \frac{\left(\frac{m+n-3}{2}\right)!}{\left(\frac{m-n+1}{2}\right)!} \left\{ \begin{array}{l} j(n-1)\left[m + \frac{1}{2}(n-4)(1-2\lambda_1)\right] \\ + j^3(n-2)\left[m + \frac{1}{2}(n-1)(1-2\lambda_1)\right] \end{array} \right\} - \\
& - \sum_{\substack{m= \\ 1,3,\cdots}} \sum_{\substack{n= \\ 3,5,\cdots}} \frac{2^{n-3}}{(\bar{z} \mp [(m-1) + 2\lambda_1])^n} \frac{\left(\frac{m+n-4}{2}\right)!}{\left(\frac{m-n+2}{2}\right)!} \left\{ \begin{array}{l} j\left[\begin{array}{l} +(n-3)(m^2 - (n-2)^2) - \frac{1}{4}(n-1)(n-2)(2n-5) \\ +\frac{1}{2}(n-1)(n-2)(m-1)(1-2\lambda_1) \\ +\frac{1}{4}(n-1)(n-2)[1-(2\lambda_1)^2] \end{array} \right] \\ + j^3\left[\begin{array}{l} +n(m^2 - (n-2)^2) - \frac{1}{4}(n-1)(n-2)(2n-5) \\ +\frac{1}{2}(n-1)(n-2)(m-1)(1-2\lambda_1) \\ +\frac{1}{4}(n-1)(n-2)[1-(2\lambda_1)^2] \end{array} \right] \end{array} \right\} \mp \\
& \mp \sum_{\substack{m= \\ 2,4,\cdots}} \sum_{\substack{n= \\ 2,4,\cdots}} \frac{2^{n-3}}{(\bar{z} \mp m)^n} \frac{\left(\frac{m+n-4}{2}\right)!}{\left(\frac{m-n+2}{2}\right)!} \left\{ \begin{array}{l} j\left[\begin{array}{l} +(n-3)(m^2 - (n-2)^2) - \frac{1}{4}(n-1)(n-2)(2n-5) \\ +\frac{1}{2}(n-1)(n-2)(m-1)(1-2\lambda_1^2) \\ +\frac{1}{4}(n-1)(n-2)[1-(2\lambda_1^2)^2] \end{array} \right] \\ + j^3\left[\begin{array}{l} +n(m^2 - (n-2)^2) - \frac{1}{4}(n-1)(n-2)(2n-5) \\ +\frac{1}{2}(n-1)(n-2)(m-1)(1-2\lambda_1^2) \\ +\frac{1}{4}(n-1)(n-2)[1-(2\lambda_1^2)^2] \end{array} \right] \end{array} \right\} - \\
& - \sum_{\substack{m= \\ 2,4,\cdots}} \sum_{\substack{n= \\ 3,5,\cdots}} \frac{2^{n-2}}{(\bar{z} \mp m)^n} \frac{\left(\frac{m+n-3}{2}\right)!}{\left(\frac{m-n+1}{2}\right)!} \left\{ \begin{array}{l} j(n-1)\left[m + \frac{1}{2}(n-4)(1-2\lambda_1^2)\right] \\ + j^3(n-2)\left[m + \frac{1}{2}(n-1)(1-2\lambda_1^2)\right] \end{array} \right\}, \quad (n \leq m+2). \qquad (18)
\end{aligned}$$

Damit ist (16) vollständig bestimmt, so daß die Spannungsverteilung in einem Parallelstreifen für vorgegebene λ_1, λ_2-Werte numerisch ermittelt werden kann.

Von besonderem Interesse sind die Sonderfälle $\lambda_1 = \lambda_2 = 0{,}5$ und $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 0$, die sich leicht aus den vorliegenden Ergebnissen ableiten lassen. Auf eine Wiedergabe der Spannungsfunktionen für diese beiden Belastungsfälle soll hier der Kürze halber verzichtet werden. Der erste Fall, der die Beanspruchung eines Parallelstreifens durch eine in seiner Mitte angreifende Kraft Q betrifft, wurde bereits auf andere Weise von *E. Melan*[1] und *K. Girkmann*[2] behandelt. Die Angaben dieser beiden Arbeiten stehen in guter Übereinstimmung mit den numerischen Ergebnissen, die anhand der hyperkomplexen Spannungsfunktion erzielt wurden. Dabei konnte die Reihenentwicklung für Punkte, die auf einer Parallelen zur x-Achse einen Abstand $a/4$ (bzw. a) haben, nach der 6. (bzw. 12.) Näherung abgebrochen werden.

Die bisherige Untersuchung behandelte den Spannungszustand in einem Parallelstreifen, dessen Belastung durch eine Kraft parallel zu den Rändern erfolgte. Der Fall, daß ein unendlich langer Streifen senkrecht zu seinen Rändern beansprucht wird, ist praktisch nicht realisierbar infolge der unendlich groß werdenden Biegespannungen σ_y. Erst der Übergang zu einem Parallelstreifen von endlicher Länge führt zu einer neuen bedeutsamen Fragestellung, nämlich zur Behandlung von Scheiben rechteckiger Umrandung, die durch Punktkräfte beansprucht werden. Es liegt nahe, auch hierfür eine Lösung mit Hilfe hyperkomplexer Singularitäten aufzubauen. Aufgaben dieser Art sind bislang mit Hilfe Fourierscher Reihen und der Differenzenrechnung behandelt worden. Daneben ist die Arbeit von *J. Fadle*[3] zu nennen, der mit Hilfe komplexer Eigenwertfunktionen den Spannungszustand einer quadratischen Scheibe bestimmte.

d) Zwei diametral entgegengesetzt wirkende gleich große Kräfte im Innern einer Kreisscheibe. Im folgenden soll der Spannungszustand einer Kreisscheibe vom Radius a bestimmt werden, die in ihrem Innern durch zwei gleiche, entgegengesetzt gerichtete Kräfte P auf Zug belastet wird. Die beiden Kräfte greifen nach Abb. 5 auf einem Durchmesser an; ihre Angriffspunkte haben vom Kreismittelpunkt 0 die Abstände b' und b''. Weiter werden die beiden in der Abbildung eingezeichneten rechtwinkligen Koordinatensysteme x', y' und x'', y'' eingeführt. Der Koordinatenanfangspunkt $0'$ (bzw. $0''$) liegt auf der reellen Achse und ist vom Kreismittelpunkt $b' + c'$ (bzw. $b'' + c''$) Längeneinheiten entfernt. Die Werte für c' und c'' ergeben sich aus Gleichung (24) und (25).

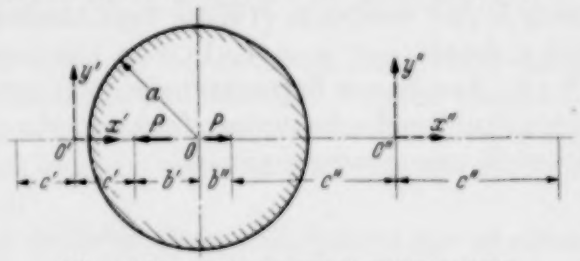


Abb. 5. Belastung im Innern einer Kreisscheibe.

Für die zu ermittelnde Spannungsfunktion besteht nach (13) die hyperkomplexe Konstante aus ersten und dritten Elementen. Wird zunächst das (x', y')-System betrachtet, so sind im Punkte $x' = c'$, $y' = 0$ die beiden Singularitäten $1/(z' - c')$ und $j^2/(z' - c')$ anzunehmen. Statt der rechtwinkligen Koordination x', y' werden nun die Bipolarkoordinaten λ', μ' eingeführt. Für Punkte der Scheibe ist $\lambda' > 0$. Die beiden Singularitäten müssen an der gegebenen Kreiskontur $\lambda'_0 = \text{const.}$ so gespiegelt werden, daß die auf das neue Koordinatennetz bezogenen Spannungen $\sigma_{\lambda'_{Rand}}$ und $\tau_{\lambda'\mu'_{Rand}}$ verschwinden. Dies erfordert nach dem Spiegelungsverfahren die Annahme eines Poles dritten Grades im Punkte $x' = -c'$, $y' = 0$. Die Funktionen, aus denen sich dieser Pol zusammensetzt, enthalten wieder Koeffizienten, die nur aus ersten und dritten Elementen aufgebaut sind. Zur Bestimmung dieser Koeffizienten werden die Beiträge der einzelnen Singularitäten für die nach den Transformationsformeln (26) errechneten Spannungen $\sigma_{\lambda'_{Rand}}$ und $\tau_{\lambda'\mu'_{Rand}}$ nach Potenzen von $\cos\mu'$ geordnet. Die Koeffizienten sind dann so festzulegen, daß alle Terme gleicher Potenzen von $\cos\mu'$, die sich aus den beiden Randspannungen ergeben, verschwinden. Diese Bedingung ist mit den angegebenen Singularitäten allein nicht zu erfüllen. — Ähnliche Verhältnisse kommen in der komplexen Potentialtheorie vor. Beispielsweise ist zur Bestimmung der Strömungsfunktion für das Feld einer Quelle, das durch eine Kreiskontur gestört wird, außer der zu der Quelle spiegelbildlich gelegenen Singularität im Kreisinnern noch eine Singularität im Mittelpunkt des Kreises anzunehmen, die der im Unendlichen gelegenen Senke entspricht; die Bedingung, daß der Kreis zur Stromlinie wird, läßt sich dann erfüllen. Wird derselbe Gedanke auf das hier vorliegende elastische Problem angewendet, so ist zu den bereits vorhandenen Singularitäten noch im Punkte 0 der Abb. 5 ein Pol anzunehmen. Weiter kann eine

[1] *E. Melan*. Z. angew. Math. Mech. 5 (1925), S. 314.
[2] *K. Girkmann*, Flächentragwerke, S. 109, 2. Aufl. Wien 1948 oder auch Ing.-Arch. 13 (1942/43), S. 273.
[3] *J. Fadle*, Ing.-Arch. 11 (1940), S. 125.

hyperkomplexe Konstante von der Art const · $(1-j^2)$ aufgenommen werden, die den von einem hydrostatischen Druck herrührenden Spannungszustand darstellt. Mit einem solchen Ansatz gelingt es, die an der Kreiskontur vorgeschriebenen Randbedingungen zu erfüllen und damit die noch unbekannten Koeffizienten der einzelnen Funktionen festzulegen. Die beiden gegebenen Singularitäten $1/(z'-c')$ und $j^2/(z'-c')$ führen dann zu den Kombinationen

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{1}{z'-c'}+\frac{2j^2-1}{z'+c'}-2c'\frac{1+j^2\,2e^{\lambda_0'}\operatorname{Cof}\lambda_0'}{(z'+c')^2}+2c'^2e^{2\lambda_0'}\frac{1+j^2}{(z'+c')^3}-\frac{1}{2}\frac{1+j^2}{z'-(b'+c')}+\\
&\quad+\frac{1}{2c'}\operatorname{Sin}\lambda_0'(\operatorname{Cof}\lambda_0'-3\operatorname{Sin}\lambda_0')(1-j^2),\\
&\frac{j^2}{z'-c'}+\frac{j^2}{z'+c'}+2c'e^{2\lambda_0'}\frac{j^2}{(z'+c')^2}-2c'^2e^{2\lambda_0'}\frac{1+j^2}{(z'+c')^3}-\frac{1}{2}\frac{1+j^2}{z'-(b'+c')}+\\
&\quad+\frac{1}{2c'}e^{\lambda_0'}\operatorname{Sin}\lambda_0'(1-j^2).
\end{aligned}\right\}\tag{19}$$

Hierin sind besonders die im Punkte 0 singulär werdenden Funktionen zu beachten, deren Vorhandensein sich dadurch anschaulich erklärt, daß die Scheibe infolge einer im Punkte $x'=c'$, $y'=0$ angreifenden Kraft P sich nicht im Gleichgewicht befindet und deshalb einen weiteren singulären Punkt im Innern der Kreisumrandung erforderlich macht, an dem eine gleich große aber entgegengesetzt gerichtete Kraft P anzunehmen ist. Für den Sonderfall $\lambda'=0$ folgen aus (19) unter Beachtung der verschieden gewählten Koordinatensysteme die erste und die dritte Zeile der Gleichung (15); die im Punkte 0 vorhandenen Singularitäten von (19) rücken für diesen Fall ins Unendliche, so daß sie fortgelassen werden können. In analoger Weise kann nun von den auf das (x'', y'')-System bezogenen Funktionen $1/(z''+c'')$ und $j^2/(z''+c'')$ ausgegangen werden, um die zugehörigen Singularitäten zusammenzustellen. Eine Rechnung ist dazu entbehrlich; anhand (19) läßt sich unmittelbar das Ergebnis angeben. Unter Einführung der Bipolarkoordinaten λ'', μ'' werden in (19) die Veränderliche z' durch z'', die Werte λ' durch $-\lambda''$, b' durch $-b''$ und c' durch $-c''$ ersetzt. In dem hier interessierenden Bereich der Halbebene $x''<0$ ist dabei $\lambda''<0$. Aus diesen Betrachtungen folgt unter Beachtung von (13) für das in Abb. 5 veranschaulichte Problem die Spannungsfunktion, die aus den auf die beiden Koordinatensysteme bezogenen Anteilen zusammengesetzt ist,

$$\begin{aligned}
&f(z')+f(z'')=\\
&=\frac{P}{4\pi}(1-\nu)\left[\begin{array}{l}\dfrac{1}{z''+c''}+\dfrac{2j-1}{z''-c''}+2c''\dfrac{1+j^2\,2e^{-\lambda_0''}\operatorname{Cof}\lambda_0''}{(z''-c'')^2}+2c''^2e^{-2\lambda_0''}\dfrac{1+j^2}{(z''-c'')^3}+\dfrac{1}{2c''}\operatorname{Sin}\lambda_0''(\operatorname{Cof}\lambda_0''+3\operatorname{Sin}\lambda_0'')(1-j)^2\\
-\dfrac{1}{z'-c'}-\dfrac{2j^2-1}{z'+c'}+2c'\dfrac{1+j\,2e^{\lambda_0'}\operatorname{Cof}\lambda_0'}{(z'+c')^2}-2c'^2e^{2\lambda_0'}\dfrac{1+j^2}{(z'+c')^4}-\dfrac{1}{2c'}\operatorname{Sin}\lambda_0'(\operatorname{Cof}\lambda_0'-3\operatorname{Sin}\lambda_0')(1-j^2)\end{array}\right]+\\
&+\frac{P}{4\pi}(3+\nu)\left[\begin{array}{l}\dfrac{j^2}{z''+c''}+\dfrac{j^2}{z''-c''}-2c''e^{-2\lambda_0''}\dfrac{j^2}{(z''-c'')^2}-2c''^2e^{-2\lambda_0''}\dfrac{1+j^2}{(z''-c'')^3}+\dfrac{1}{2c''}e^{-\lambda_0''}\operatorname{Sin}\lambda_0''(1-j^2)\\
-\dfrac{j^2}{z'-c'}-\dfrac{j^2}{z'+c'}-2c'e^{2\lambda_0'}\dfrac{j^2}{(z'+c')^2}+2c'^2e^{2\lambda_0'}\dfrac{1+j^2}{(z'+c')^3}-\dfrac{1}{2c'}e^{\lambda_0'}\operatorname{Sin}\lambda_0'(1-j^2)\end{array}\right].
\end{aligned}\tag{20}$$

In (20) wurden beide Koordinatensysteme beibehalten, da so die Übersicht am ehesten gewahrt bleiben dürfte. Die nach (19) im Punkte 0 singulär werdenden Funktionen heben sich gegenseitig auf; sie treten daher in (20) nicht mehr auf. Für Punkte des horizontalen Durchmessers der Scheibe (Abb. 5) lassen sich die Spannungen σ_x und σ_y leicht angeben, da der Nenner der Spannungsfunktion (20) reell ist; für Punkte des vertikalen Durchmessers folgen die Spannungen aus der Zerlegung der einzelnen Funktionen in ihre Elemente. Die beiden Normalspannungen werden auf beiden Durchmessern zugleich die Hauptspannungen. Die Auswertung des Integrals

$$\left|\int_{b'+c'-ja}^{b'+c'+ja}f(z')\,dz'-\int_{-b''-c''-ja}^{-b''-c''+ja}f(z'')\,dz''\right|=P$$

4. Element

kontrolliert die Gleichgewichtsbedingung.

Für den Sonderfall $c'=c''\to 0$ greifen die beiden Kräfte am Kreisrand an. Mit $\lambda'=-\lambda''=0$ und Beachtung von (24) folgt aus (20)

$$\begin{aligned}
f(z')+f(z'')\Big|_{c'=c''=0}&=\frac{P}{4\pi}(1-\nu)\left[\frac{2j^2}{z''}-\frac{2j^2}{z'}-\frac{1}{a}(1-j^2)\right]+\frac{P}{4\pi}(3+\nu)\left[\frac{2j^2}{z''}-\frac{2j^2}{z'}-\frac{1}{a}(1-j^2)\right]\\
&=\frac{2}{\pi}Pj^2\left(\frac{1}{z''}-\frac{1}{z'}\right)-\frac{P}{\pi a}(1-j^2).
\end{aligned}$$

Dies ist die Spannungsfunktion für die Spannungsverteilung einer Kreisscheibe vom Radius a, die durch zwei gleiche einander gegenüberliegende Kräfte P auf Zug belastet wird. Die auf Druck beanspruchte Kreisscheibe wurde bekanntlich erstmalig von *H. Hertz*[1] untersucht. Auch für den speziellen Fall, daß eine Kraft im Innern der Scheibe, die andere auf dem gleichen Durchmesser aber am Kreisrand angreift, läßt sich die Spannungsverteilung aus (20) ohne weiteres anschreiben.

Der in Abb. 5 dargestellten Belastung einer Kreisscheibe ist der Fall der Beanspruchung einer unendlich ausgedehnten Scheibe verwandt, die durch ein Zugpaar gespannt wird, wenn zwischen den Angriffspunkten der beiden Zugkräfte eine Bohrung vorhanden ist. Dieser Fall wurde von *R. Sonntag*[2] unter der Voraussetzung behandelt, daß der Durchmesser der Bohrung klein ist gegenüber dem Abstand der Kraftangriffspunkte. Die Anwendung der hyperkomplexen Theorie auf diese Aufgabe gestattet nach den bisherigen Überlegungen die Spannungsverteilung in geschlossener Form anzugeben. Greifen nämlich die beiden Kräfte in den Punkten $z=-c'$ und $z=+c''$ an, so ergibt sich für diesen Belastungsfall mit den alten Bezeichnungen der Abb. 5 die hyperkomplexe Spannungsfunktion

$$f(z')+f(z'')=$$

$$=\frac{P}{4\pi}(1-\nu)\left[\begin{array}{l}\dfrac{1}{z''-c''}+\dfrac{2j^2-1}{z''+c''}-2c''\dfrac{1+j^2\,2e^{\lambda_0''}\operatorname{Cof}\lambda_0''}{(z''+c'')^2}+2c''^2e^{2\lambda_0''}\dfrac{1+j^2}{(z''+c'')^3}-\dfrac{c''}{2}\dfrac{\operatorname{Cof}\lambda_0''-3\operatorname{Sin}\lambda_0''}{\operatorname{Sin}\lambda_0''}\dfrac{1+j^2}{[z''+b''+c'']^2}\\ -\dfrac{1}{z'+c'}-\dfrac{2j^2-1}{z'-c'}-2c'\dfrac{1+j^2\,2e^{-\lambda_0'}\operatorname{Cof}\lambda_0'}{(z'-c')^2}-2c'^2e^{-2\lambda_0'}\dfrac{1+j^2}{(z'-c')^3}+\dfrac{c'}{2}\dfrac{\operatorname{Cof}\lambda_0'+3\operatorname{Sin}\lambda_0'}{\operatorname{Sin}\lambda_0'}\dfrac{1+j^2}{[z'-(b'+c')]^2}\end{array}\right]+$$

$$+\frac{P}{4\pi}(3+\nu)\left[\begin{array}{l}\dfrac{j^2}{z''-c''}+\dfrac{j^2}{z''+c''}+2c''e^{2\lambda_0''}\dfrac{j^2}{(z''+c'')^2}-2c''^2e^{2\lambda_0''}\dfrac{1+j^2}{(z''+c'')^3}-\dfrac{c''}{2}\dfrac{e^{2\lambda_0''}}{\operatorname{Sin}\lambda_0''}\dfrac{1+j^2}{[z''+b''+c'']^2}\\ -\dfrac{j^2}{z'+c'}-\dfrac{j^2}{z'-c'}+2c'e^{-2\lambda_0'}\dfrac{j^2}{(z'-c')^2}+2c'^2e^{-2\lambda_0'}\dfrac{1+j^2}{(z'-c')^3}+\dfrac{c'}{2}\dfrac{e^{-\lambda_0'}}{\operatorname{Sin}\lambda_0'}\dfrac{1+j^2}{[z'-(b'+c')]^2}\end{array}\right]. \tag{21}$$

Die dabei aufgenommenen Funktionen, die für den Mittelpunkt der Bohrung einen Pol zweiten Grades liefern, drücken hier den Einfluß eines hydrostatischen Druckes aus. Für den Grenzfall, daß die beiden Kräfte unmittelbar am Rande der Bohrung auf einem Durchmesser angreifen, folgt aus (21) die dieser Belastung entsprechende Spannungsverteilung, die bereits von *R. Sonntag*[3] mitgeteilt wurde.

Bei den Untersuchungen dieses Abschnittes stand die Ermittlung der Spannungsverteilung im Vordergrunde. Um auch die Verschiebungen zu bestimmen, sind die Gleichungen (12a) und (12b) heranzuziehen. Anhand (20) und (21) läßt sich weiter die Spannungsverteilung für ein kreisringförmiges Kettenglied entwickeln, dessen Randkreise konzentrisch oder exzentrisch angeordnet sein können und das am Innen- oder Außenkreis durch zwei gleich große und entgegengesetzt gerichtete Kräfte auf Zug oder Druck belastet wird. Die Lösung dieser Aufgabe führt auf eine Reihenentwicklung, die in ähnlicher Weise wie das Ergebnis für die Spannungsverteilung einer Punktlast in einem Parallelstreifen aufgebaut ist.

5. Zusammenfassung und Schlußbetrachtung. Ausgehend von einer von *L. Sobrero* gegebenen Darstellung des Zusammenhanges einer hyperkomplexen Algebra mit der Aufgabe der ebenen Elastizitätstheorie wurden für den ebenen Spannungszustand einer Scheibe aus einer hyperkomplexen Funktion die allgemeinen Gleichungen für die Spannungen und Verschiebungen abgeleitet. Die weitgehende Analogie zur komplexen Potentialtheorie in Verbindung mit einem erweiterten Spiegelungsverfahren erleichtert erheblich das Verständnis der Zusammenhänge im Hyperkomplexen. Die durchgeführten Anwendungsbeispiele machen die sich damit bietenden Vorteile gegenüber den in der Einleitung genannten Methoden deutlich, wie ein Vergleich mit den aus dem Schrifttum bekannten Lösungen zeigt. Bei den untersuchten Belastungsfällen handelt es sich vorwiegend um Randwertprobleme erster Art. Diese sind dadurch gekennzeichnet, daß der Scheibenrand spannungsfrei ist (sofern nicht an Randpunkten Kräfte angreifen). Zur Ermittlung des Spannungszustandes werden bei der hyperkomplexen Theorie der Einfluß der an den Scheiben angreifenden Kräfte wie auch die Bedingung der vorgeschriebenen Spannungsfreiheit des Randes durch Singularitäten dargestellt. Mit der Auffindung der hyperkomplexen Spannungsfunktion, die eine besonders geschlossene Lösungsform liefert, ist die Aufgabe gelöst;

[1] *H. Hertz*, Z. Math. Phys. 28 (1883), S. 125.
[2] *R. Sonntag*, Mitt. Mech.-Techn. Labor. der TH München; 3. Folge, Heft 34, S. 37. München 1930.
[3] a. a. O. S. 30

die Spannungen und Verschiebungen selbst errechnen sich dann auf ganz elementare Weise. Infolge des übersichtlichen Aufbaus der gewonnenen Spannungsfunktion werden etwaige Fehler bei der numerischen Auswertung leicht erkannt.

Die vorliegende Untersuchung läßt es wünschenswert erscheinen, die hyperkomplexe Theorie auf eine ganze Reihe weiterer konkreter Einzelprobleme anzusetzen, da dieses Verfahren auch für schwierigere Aufgaben bei erträglichem Arbeitsaufwand numerische Ergebnisse von ausreichender Genauigkeit verspricht. Vorzugsweise dürften hier neben den Randwertproblemen erster Art Randwertprobleme zweiter Art, bei denen die Werte der Verschiebungen am Rande vorgeschrieben sind, wie auch gemischte Randwertprobleme in Betracht kommen.

Bei Abschluß der vorliegenden Arbeit machte mich Herr Prof. *A. E. Green*, University of Durham (England), auf verschiedene Arbeiten[1] aufmerksam, die sich auch mit der Ermittlung der Spannungsverteilung in elastischen Scheiben befassen und die nicht unerwähnt bleiben sollen. In diesen Aufsätzen werden die Spannungs- und Verschiebungskomponenten aus zwei komplexen Potentialfunktionen abgeleitet. Auch dieses Verfahren führt zu eleganten Lösungen und es wird interessant sein, die weitere Entwicklung zu verfolgen.

6. Anhang. a) Über das Rechnen mit hyperkomplexen Zahlen und Funktionen. Um eine Einführung in die hyperkomplexe Algebra zu geben, sollen noch einige Hinweise folgen. Dabei ist nicht an die Darstellung einer systematischen Theorie der hyperkomplexen Zahlen und Funktionen gedacht. Die folgenden Ausführungen sind deshalb in ihrem Umfang nur darauf beschränkt, verschiedene in der Arbeit benutzte Sätze sowie einige Besonderheiten zu erläutern. Für ein weitergehendes Studium muß auf die Originalarbeit von *L. Sobrero* und das dort zitierte Schrifttum verwiesen werden.

Die Addition bzw. Subtraktion von hyperkomplexen Zahlen erfolgt durch die Addition bzw. Subtraktion entsprechender Elemente. Das Produkt zweier hyperkomplexer Zahlen liefert im allgemeinen ein Polynom bis zur sechsten Potenz von j; die Potenzen j^4, j^5 und j^6 lassen sich mit Hilfe von (4) und weiter, wenn diese Gleichung mit j und j^2 multipliziert wird, auf die ersten vier Potenzen von j zurückführen, wie es unter Ziffer 3 angedeutet wurde. Die Aufspaltung eines Quotienten in seine vier Elemente ist etwas umständlicher; für die praktische Rechnung ist die Schreibweise von *T. Levi-Civita* besonders geeignet und übersichtlich. Danach läßt sich eine hyperkomplexe Zahl

$$z = a + jb + j^2 c + j^3 d$$

— a, b, c und d sind reelle Zahlen — in die Form umschreiben

$$z = (\alpha' + i\alpha'') + (\beta' + i\beta'')\,(1 + j^2).$$

Die Größe i ist die imaginäre Einheit und, wie schon angeführt, durch $i = \frac{1}{2}(3j + j^3)$ mit den hyperkomplexen Einheiten verknüpft. Ferner bestehen die Zusammenhänge

$$\alpha' = a - c; \quad \alpha'' = b - d; \quad \beta' = c; \quad \beta'' = \frac{1}{2}(3d - b).$$

Die Zahlen $\alpha = \alpha' + i\alpha''$ und $\beta = \beta' + i\beta''$ sind dann komplex; die hyperkomplexe Zahl z läßt sich somit in der Form

$$z = \alpha + \beta(1 + j^2)$$

darstellen. Nach Multiplikation mit $\alpha - \beta(1 + j^2)$ wird der Quotient

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{\alpha} - \frac{\beta}{\alpha^2}(1 + j^2).$$

Die Erweiterung mit dem konjugiert komplexen Wert von α bzw. α^2 führt nach einigen Umrechnungen zu der in seinen vier Elementen dargestellten Funktion $1/z$. Nicht möglich ist die Division, wenn

$$\alpha^2 = \alpha'^2 + \alpha''^2 = (a - c)^2 + (b - d)^2$$

verschwindet.

---

[1] *N. Muschelišvili*, Z. angew. Math. Mech. 13 (1933), S. 264; vgl. weiter die hier angegebene Literatur.
K. J. Schulz, Over den spanningstoestand in doorboorde platen. Diss. Delft 1941.
A. C. Stevenson, Philos. Mag. (7) 34 (1943), S. 766.
A. C. Stevenson, Proc. Roy. Soc., A, 184 (1945), S. 129 u. 218.

Für den Sonderfall $a = x$, $b = y$ und $c = d = 0$ wird z. B.

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{(x + i\,y) - \frac{i}{2}(1 + j^2)\,y} = \frac{x}{r^2}\left(1 + \frac{y^2}{r^2}\right) - j\,\frac{y}{r^2}\left(1 + \frac{y^2}{r^2}\right) + j^2\,\frac{x\,y^2}{r^4} - j^3\,\frac{y^3}{r^4} \tag{22}$$

mit $r^2 = x^2 + y^2$. Steht statt z der Wert $z - z_0$ mit $z_0 = x_0 + j\,y_0$, so ist x durch $x - x_0$ und y durch $y - y_0$ zu ersetzen.

Für die durchgeführten Anwendungen ist die Behandlung der Funktion $1/z^n$ mit reellem n bedeutsam. Dafür wird mit $r^2 = x^2 + y^2$

$$\frac{1}{z^n} = \frac{1}{\left[(x + i\,y) - \frac{i}{2}(1 + j^2)\,y\right]^n} = \frac{\left[(x + i\,y) + \frac{i}{2}(1 + j^2)\,y\right]^n}{(x + i\,y)^{2n}} = \frac{(x - i\,y)^n}{r^{2n}}\left[1 + n\,\frac{i}{2}(1 + j^2)\,\frac{y}{r^2}(x - i\,y)\right].$$

Die Anwendung des binomischen Satzes führt zu der Reihenentwicklung

$$\frac{1}{z^n} = \frac{1}{r^{2n}}\left[x^n - i\binom{n}{1} y\,x^{n-1} - \binom{n}{2} y^2\,x^{n-2} + i\binom{n}{3} y^3\,x^{n-3} + \cdots\right] +$$
$$+ n\,\frac{i}{2}(1 + j^2)\,\frac{y}{r^{2(n+1)}}\left[x^{n+1} - i\binom{n+1}{1} y\,x^n - \binom{n+1}{2} y^2\,x^{n-1} + \cdots\right].$$

Mit der Beziehung $i\,(1 + j^2) = j + j^3$ und des bekannten Wertes für i liefert diese Gleichung für ungerades n nach Aufspaltung in ihre vier Elemente die Darstellung

$$\underset{p = 1, 2, 3, \ldots}{\frac{1}{z^{2p-1}}} = \frac{x}{r^{2p}}\left\{1 + \sum_{\substack{q = 1, 2, 3, \ldots \\ \leq p}} (-1)^{q-1}\,\frac{2^{2q-1}}{(2q)!}\,\frac{(p + q - 1)!}{(p - q)!}\,[(2q - 2)\,p + q]\left(\frac{y}{r}\right)^{2q}\right\} -$$
$$- j\,\frac{y}{r^{2p}}(2p - 1)\left\{1 - \sum_{\substack{q = 1, 2, 3, \ldots \\ \leq p}} (-1)^q\,\frac{2^{2q-1}}{(2q+1)!}\,\frac{(p + q - 1)!}{(p - q)!}\,[(2q - 2)\,p + 3q]\left(\frac{y}{r}\right)^{2q}\right\} +$$
$$+ j^2\,\frac{x}{r^{2p}}(2p - 1) \sum_{\substack{q = 1, 2, 3, \ldots \\ \leq p}} (-1)^{q-1}\,\frac{2^{2q-1}}{(2q)!}\,\frac{(p + q - 1)!}{(p - q)!}\,q\left(\frac{y}{r}\right)^{2q} -$$
$$- j^3\,\frac{y}{r^{2p}}(2p + 1)(2p - 1) \sum_{\substack{q = 1, 2, 3, \ldots \\ \leq p}} (-1)^{q-1}\,\frac{2^{2q-1}}{(2q+1)!}\,\frac{(p + q - 1)!}{(p - q)!}\,q\left(\frac{y}{r}\right)^{2q}$$

und entsprechend für gerades n

$$\underset{p = 1, 2, 3, \ldots}{\frac{1}{z^{2p}}} = \frac{1}{r^{2p}}\left\{1 + \sum_{\substack{q = 1, 2, 3, \ldots \\ \leq p+1}} (-1)^{q-1}\,\frac{2^{2q-1}}{(2q)!}\,\frac{(p + q - 1)!}{(p - q + 1)!}\,p\,[(2q - 2)\,p + 3q - 2]\left(\frac{y}{r}\right)^{2q}\right\} -$$
$$- j\,\frac{x\,y}{r^{2p+2}}\left\{2p - \sum_{\substack{q = 1, 2, 3, \ldots \\ \leq p}} (-1)^q\,\frac{2^{2q}}{(2q+1)!}\,\frac{(p + q)!}{(p - q)!}\,[(2q - 2)\,p + 3q]\left(\frac{y}{r}\right)^{2q}\right\} +$$
$$+ j^2\,\frac{2p + 1}{r^{2p}} \sum_{\substack{q = 1, 2, 3, \ldots \\ \leq p+1}} (-1)^{q-1}\,\frac{2^{2q-1}}{(2q)!}\,\frac{(p + q - 1)!}{(p - q + 1)!}\,p\,q\left(\frac{y}{r}\right)^{2q} -$$
$$- j^3\,\frac{x\,y}{r^{2p+2}}(2p + 1) \sum_{\substack{q = 1, 2, 3, \ldots \\ \leq p}} (-1)^{q-1}\,\frac{2^{2q}}{(2q+1)!}\,\frac{(p + q)!}{(p - q)!}\,q\left(\frac{y}{r}\right)^{2q}.$$

Dabei sind die Potenzen von x durch solche von y ausgedrückt worden, um das Rechnen für eine numerische Auswertung der Formeln mit Hilfe der Rechenmaschine weitgehendst zu vereinfachen.

Für spezielle Anwendungen kann es nützlich sein, einen entsprechenden Ausdruck für $1/z^n$ in Polarkoordinaten darzustellen. Mit der Einführung von $\vartheta = \operatorname{arc\,tg}\, y/x$ unter Beibehaltung der alten Bedeutung für r folgt

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{r\,e^{i\vartheta}}\,\frac{1}{1 - \frac{i}{2}(1 + j^2)\,e^{-i\vartheta}\sin\vartheta}, \qquad \frac{1}{z^n} = \frac{1}{r^n}\left[e^{-in\vartheta} + n\,\frac{i}{2}(1 + j^2)\,e^{-i(n+1)\vartheta}\sin\vartheta\right]$$

und zerlegt

$$\frac{1}{z^n} = \frac{1}{r^n}\left[\cos n\vartheta + \frac{n}{2}\sin\vartheta\sin(n+1)\vartheta\right] + j\frac{1}{r^n}\left[\frac{n}{2}\sin\vartheta\cos(n+1)\vartheta - \frac{3}{2}\sin n\vartheta\right] +$$

$$+ j^2\frac{1}{r^n}\frac{n}{2}\sin\vartheta\sin(n+1)\vartheta + j^3\frac{1}{r^n}\left[\frac{n}{2}\sin\vartheta\cos(n+1)\vartheta - \frac{1}{2}\sin n\vartheta\right].$$

Von den hyperkomplexen Funktionen ist weiter der Logarithmus einer hyperkomplexen Variablen bedeutsam. Mit der *Levi-Civita*schen Schreibweise und unter Anwendung der *Taylor*schen Formel wird

$$\ln z = \ln\left[(x+iy) - \frac{i}{2}(1+j^2)y\right] = \ln(x+iy) - \frac{i}{2}(1+j^2)\frac{y}{x+iy}.$$

Nach Aufspaltung der komplexen Ausdrücke folgt schließlich die Gleichung

$$\ln z = \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2) + i\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x} - \frac{i}{2}(1+j^2)\frac{xy}{x^2+y^2} - \frac{1}{2}(1+j^2)\frac{y^2}{x^2+y^2}, \tag{23}$$

aus der sich unmittelbar die vier Elemente ergeben.

b) Zur Geometrie der Bipolarkoordinaten. Der Zusammenhang zwischen rechtwinkligen Koordinaten und Bipolarkoordinaten läßt sich unmittelbar aus einer hyperkomplexen Transformation in Anlehnung an die in der komplexen Theorie geltenden Beziehungen[1] ableiten. Mit der *Apollonius*schen Kreisschar $\lambda = \text{const.}$ und der dazu orthogonalen Kreisschar $\mu = \text{Const.}$ folgt

$$z = x + jy = c\frac{\mathfrak{Sin}\,\lambda}{\mathfrak{Cof}\,\lambda + \cos\mu} + jc\frac{\sin\mu}{\mathfrak{Cof}\,\lambda + \cos\mu}.$$

Dabei bedeutet der Wert c einen Parameter, der das vorliegende Bipolarkoordinatennetz bestimmt. Mit den Bezeichnungen der Abb. 6 ist weiter für alle Punkte eines Kreises der Schar $\lambda = \text{const.}$ das Verhältnis $\varrho_2/\varrho_1 = e^{\lambda}$ und für Punkte der Schar $\mu = \text{Const.}$ der Winkel $\mu = \pi - \Theta_1 + \Theta_2$. Die Trennung der Elemente in der Gleichung für z liefert

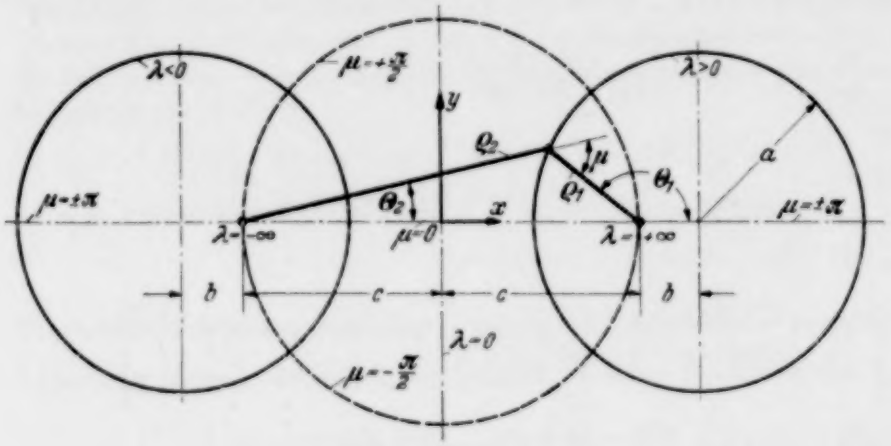


Abb. 6. Bipolare Koordinaten.

$$\frac{x}{\mathfrak{Sin}\,\lambda} = \frac{y}{\sin\mu}.$$

Weiter folgt nach einigen Zwischenrechnungen

$$\mathfrak{Tg}\,\lambda = \frac{2cx}{c^2+x^2+y^2},$$

$$\operatorname{tg}\mu = \frac{2cy}{c^2-x^2-y^2}.$$

Diese beiden Gleichungen und die Transformationsgleichung für z gestatten, für jeden Punkt der Ebene die Koordinaten des einen Systems durch die des anderen auszudrücken und umgekehrt. Für die Kreise $\lambda = \text{const.}$ und $\mu = \text{Const.}$ folgen die Gleichungen

$$(x - c\,\mathfrak{Ctg}\,\lambda)^2 + y^2 = \frac{c^2}{\mathfrak{Sin}^2\lambda}, \qquad x^2 + (y + c\operatorname{ctg}\mu)^2 = \frac{c^2}{\sin^2\mu}.$$

Die Mittelpunkte der Kreise $\lambda = \text{const.}$ liegen auf der x-Achse und sind durch die Abszisse $x = c\,\mathfrak{Ctg}\,\lambda$ bestimmt. Die Radien dieser Kreise betragen

$$a = \frac{c}{\mathfrak{Sin}\,\lambda}. \tag{24}$$

Der Abstand b ermittelt sich aus $b + c = c\,\mathfrak{Ctg}\,\lambda$ zu

$$b = a e^{-\lambda}. \tag{25}$$

[1] Vgl. etwa *W. Flügge*, Strenge Berechnung von Kreisplatten unter Einzellasten, S. 3, Berlin 1928 oder *W. Müller*, Ing.-Arch. 13 (1942/43), S. 37 u. S. 355.

Die Gleichung für $\mu = \text{Const.}$ liefert differentiiert

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg}\gamma = \frac{-x}{y + c\operatorname{ctg}\mu} = -\frac{\mathfrak{Sin}\,\lambda \sin\mu}{1 + \mathfrak{Cof}\,\lambda \cos\mu}$$

und weiter

$$\cos\gamma = \frac{1 + \mathfrak{Cof}\,\lambda \cos\mu}{\mathfrak{Cof}\,\lambda + \cos\mu}, \qquad \sin\gamma = -\frac{\mathfrak{Sin}\,\lambda \sin\mu}{\mathfrak{Cof}\,\lambda + \cos\mu},$$

wenn mit γ der durch die Tangente an die μ-Kurven mit der x-Achse gebildete Neigungswinkel im betrachteten Punkt der Ebene bezeichnet wird. Mit diesen Ausdrücken lassen sich dann die bekannten Transformationsgleichungen

$$\left.\begin{aligned} \sigma_\lambda &= \sigma_x \cos^2\gamma + \sigma_y \sin^2\gamma + \tau \sin 2\gamma \\ \sigma_\mu &= \sigma_x \sin^2\gamma + \sigma_y \cos^2\gamma - \tau \sin 2\gamma \\ \tau_{\lambda\mu} &= (\sigma_y - \sigma_x) \sin\gamma \cos\gamma + \tau \cos 2\gamma \end{aligned}\right\} \tag{26}$$

benutzen, die die in rechtwinkligen Koordinaten ausgedrückten Spannungen σ_x, σ_y und τ in die auf Bipolarkoordinaten bezogenen Spannungen umzurechnen gestatten. Für auszuführende Umrechnungen sei noch auf den Zusammenhang

$$(\mathfrak{Cof}\,\lambda + \cos\mu)^2 = (1 + \mathfrak{Cof}\,\lambda \cos\mu)^2 + \mathfrak{Sin}^2\lambda \sin^2\mu$$

hingewiesen, der mit der Gleichung $\sin^2\gamma + \cos^2\gamma = 1$ identisch ist.

[Aus dem Festigkeitslaboratorium der Technischen Hochschule Hannover.]

(Eingegangen am 15. März 1951.)

Anschrift des Verfassers: Dr.-Ing. *Kurt Schmidt*, (20a) Hannover, Technische Hochschule.

Beiträge zur Theorie der achsensymmetrisch belasteten dicken Kreisplatte insbesondere bei elastischer Lagerung.

Von I. Szabó.

1. Einleitung und Problemstellung. In einer früheren Mitteilung[1] habe ich das Problem der elastisch gebetteten dicken Kreisplatte unter Vernachlässigung der zwischen Platte und Unterlage auftretenden Reibungskräfte behandelt. Der Zweck der folgenden Ausführungen ist es einerseits, dasselbe Problem bei Berücksichtigung der letztgenannten Schubkräfte zu lösen, andererseits auf weitere Anwendungsmöglichkeiten der hier angewandten Methode hinzuweisen. Eine später folgende Mitteilung wird die praktische Auswertung der Ergebnisse bringen.

Es sei $\sigma = f(r)$ die achsensymmetrische Last einer Platte von dem Halbmesser a, der Höhe h, dem Schubmodul G und der Querkontraktionszahl ν (Abb. 1). Die Platte ruhe auf dem Halbraum als Unterlage und für das elastische Verhalten beider seien die *Hooke*schen Gesetze maßgebend. Dann bestehen zwischen den Verschiebungen ζ und ϱ (Abb. 1) bzw. der aus ihnen ableitbaren Gesamtdehnung ε und den Spannungen σ_z, σ_r, σ_t, τ (Abb. 2) folgende Beziehungen:

$$\varepsilon = \frac{\varrho}{r} + \frac{\partial \varrho}{\partial r} + \frac{\partial \zeta}{\partial z}, \tag{1}$$

$$\left.\begin{aligned} \sigma_z &= 2G\left(\frac{\partial \zeta}{\partial z} + \frac{\nu \varepsilon}{1-2\nu}\right), \quad \sigma_r = 2G\left(\frac{\partial \varrho}{\partial r} + \frac{\nu \varepsilon}{1-2\nu}\right), \\ \sigma_t &= 2G\left(\frac{\varrho}{r} + \frac{\nu \varepsilon}{1-2\nu}\right), \quad \tau = G\left(\frac{\partial \varrho}{\partial z} + \frac{\partial \zeta}{\partial r}\right) \end{aligned}\right| \tag{2}$$

und dieselben Gleichungen für die Unterlage, wobei für diese alle Größen mit dem Index 1 versehen sind (Abb. 1).

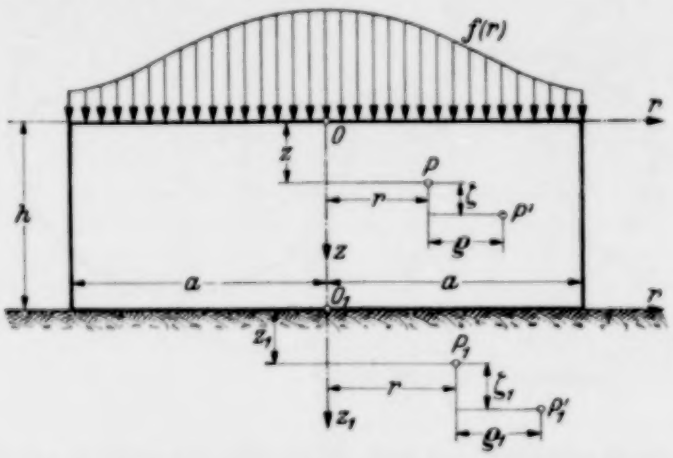


Abb. 1. Rotationssymmetrisch belastete Kreisplatte auf elastischem Halbraum.

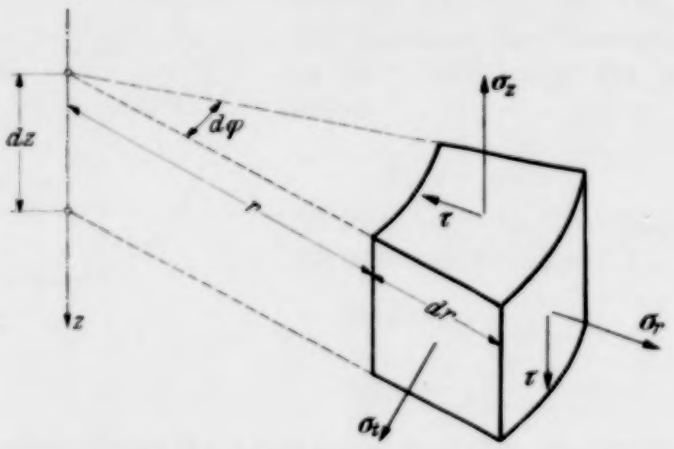


Abb. 2. Volumenelement der Platte bzw. Unterlage.

Unter der Annahme, daß die zwischen Platte und Halbraum auftretenden Reibungskräfte als Schubspannungen aufgenommen werden, lauten die Randbedingungen, wie folgt:

$$\tau(z, a) = 0, \tag{3}$$

$$\sigma_z(0, r) = -f(r), \tag{4}$$

$$\tau(0, r) = 0, \tag{5}$$

$$\sigma_{1z}(0, r) = \begin{cases} \sigma_z(h, r) & \text{für} \quad r \leq a, \\ 0 & \text{,,} \quad r > a, \end{cases} \tag{6}$$

$$\zeta_1(0, r) = \zeta(h, r) \quad \text{,,} \quad r \leq a, \tag{7}$$

[1] *I. Szabó*, Ing.-Arch. 19 (1951) S. 128, Druckfehlerberichtigung hierzu S. 354.

$$\tau_1(0, r) = \begin{cases} \tau(h, r) & \text{für } r \leq a, \\ 0 & \text{„ } r > a, \end{cases} \tag{8}$$

$$\varrho_1(0, r) = \varrho(h, r) \quad \text{„ } r \leq a, \tag{9}$$

$$\sigma_r(z, a) = 0. \tag{10}$$

Die Randbedingung (8) bedeutet, daß zwischen Platte und Unterlage beliebig große Reibungskräfte auftreten können (also „unendlich rauhe Berührungsflächen"), während der ersten Mitteilung vollkommene Glattheit zugrunde gelegt wurde; zwischen diesen beiden Grenzfällen sind offenbar alle möglichen Fälle eingeschlossen.

Die Randbedingung (9) könnte man auch durch die physikalisch gut vertretbare Forderung

$$\tau(h, r) = f_0 \sigma_z(h, r) \tag{9a}$$

(f_0 = Haftreibungszahl) ersetzen; die Erledigung dieses Falles bereitet keine neuen Schwierigkeiten und er wird hier in kurzen Andeutungen mitbehandelt.

Die Bedingung (10) bezieht sich auf die freigelagerte Platte; für die eingespannte wäre sie durch

$$\varrho(z, a) = 0 \tag{10a}$$

zu ersetzen.

2. Die Verschiebungen in der Platte und Realisierung der ersten drei Randbedingungen. Aus (1) und (2) und den Gleichgewichtsbedingungen

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\sigma_r - \sigma_t}{r} + \frac{\partial \tau}{\partial z} = 0, \qquad \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\partial \tau}{\partial r} + \frac{\tau}{r} = 0$$

ergeben sich[1] unter Vernachlässigung des Eigengewichtes (dessen Berücksichtigung näherungsweise in der Weise geschehen kann, daß man das Eigengewicht als gleichmäßige Last zu $f(r)$ schlägt) folgende Differentialgleichungen

$$(1-2\nu)\Delta\zeta + \frac{\partial \varepsilon}{\partial z} = 0, \qquad (1-2\nu)\left(\Delta\varrho - \frac{\varrho}{r^2}\right) + \frac{\partial \varepsilon}{\partial r} = 0, \qquad \Delta\Delta\zeta = 0,$$

wobei $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial r^2}$ den *Laplace*schen Operator bedeutet. Der Randbedingung (3) genügende Lösungen sind nach *Szabó*[2] [Gleichungen (32) und (33)]

$$\zeta = \sum_{k=1}^{\infty} \left[P_k e^{-\lambda_k z} + Q_k e^{\lambda_k z} - \frac{z}{2(1-2\nu)} \left(p_k e^{-\lambda_k z} + q_k e^{\lambda_k z} \right) \right] J_0(\lambda_k r) + A z + B, \tag{11}$$

$$\varrho = \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \left[P_k + \frac{(3-4\nu) p_k}{2(1-2\nu)\lambda_k} \right] e^{-\lambda_k z} + \left[-Q_k + \frac{(3-4\nu) q_k}{2(1-2\nu)\lambda_k} \right] e^{\lambda_k z} - \right. \\ \left. - \frac{z}{2(1-2\nu)} \left(p_k e^{-\lambda_k z} - q_k e^{\lambda_k z} \right) \right\} J_1(\lambda_k r). \tag{12}$$

Hierbei sind P_k, Q_k, p_k, q_k, A und B noch frei verfügbare Konstanten, $J_0(\lambda_k r)$ und $J_1(\lambda_k r)$ die *Bessel*schen Funktionen erster Art und schließlich sind die λ_k vermöge der Beziehung $J_1(\lambda_k a) = 0$ durch die unendlich vielen positiven Nullstellen t_k von $J_1(t)$ festgelegt: $\lambda_k = t_k/a$.

Die Randbedingung (4) liefert mit (2), (11) und (12)

$$2G \left[\sum_{k=1}^{\infty} \left(-\frac{P_k}{2} - \frac{q_k}{2} - \lambda_k P_k + \lambda_k Q_k \right) J_0(\lambda_k r) + A \frac{1-\nu}{1-2\nu} \right] = -f(r).$$

Diese Gleichung mit $r\,dr$ multipliziert und zwischen 0 und a integriert, ergibt wegen

$$\int_0^a J_0(\lambda_k r) r\, dr = 0$$

den Wert von A:

$$A = -\frac{1-2\nu}{(1-\nu) a^2 G} \int_0^a f(r) r\, dr. \tag{13}$$

[1] *A. Nádai*, Elastische Platten, S. 310.
[2] Siehe Fußnote auf S. 342.

Die Multiplikation mit $J_0(\lambda_n r)\, r\, dr$ und Integration liefert wegen der Orthogonalität der *Bessel*schen Funktionen

$$-\frac{p_k}{2}-\frac{q_k}{2}-\lambda_k P_k+\lambda_k Q_k=\frac{-\int_0^a f(r)\, J_0(\lambda_k r)\, r\, dr}{a^2 G\, J_0^2(\lambda_k a)}=c_k\,. \tag{14}$$

Die Forderung (5) ergibt

$$\lambda_k(P_k+Q_k)+\frac{1-\nu}{1-2\nu}(p_k-q_k)=0\,. \tag{15}$$

Durch (14) und (15) können P_k und Q_k auf p_k und q_k zurückgeführt werden:

$$\left.\begin{aligned} P_k&=-\frac{(3-4\nu)\,p_k}{4(1-2\nu)\,\lambda_k}+\frac{q_k}{4(1-2\nu)\,\lambda_k}-\frac{c_k}{2\lambda_k}\,,\\ Q_k&=-\frac{p_k}{4(1-2\nu)\,\lambda_k}+\frac{(3-4\nu)\,q_k}{4(1-2\nu)\,\lambda_k}+\frac{c_k}{2\lambda_k}\,. \end{aligned}\right| \tag{16}$$

3. Die Verschiebungen im Halbraum und die Erfüllung der Übergangsbedingungen zwischen Platte und Unterlage. Mit den noch frei wählbaren Funktionen $\Phi(\lambda)$ und $\Psi(\lambda)$ sind die Verschiebungen des Halbraumes ζ_1 und ϱ_1 nach *Szabó*[1] durch die uneigentlichen Integrale

$$\zeta_1=\frac{-z_1}{2(1-2\nu_1)}\int_0^\infty \Phi(\lambda)\, J_0(\lambda r)\, e^{-\lambda z_1}\, d\lambda+\int_0^\infty \Psi(\lambda)\, J_0(\lambda r)\, e^{-\lambda z_1}\, d\lambda\,, \tag{17}$$

$$\varrho_1=\frac{-z_1}{2(1-2\nu_1)}\int_0^\infty \Phi(\lambda)\, J_1(\lambda r)\, e^{-\lambda z_1}\, d\lambda+\int_0^\infty \left[\Psi(\lambda)+\frac{(3-4\nu_1)\,\Phi(\lambda)}{2(1-2\nu_1)\,\lambda}\right] e^{-\lambda z_1}\, J_1(\lambda r)\, d\lambda \tag{18}$$

gegeben. Aus der Randbedingung (6) fließt nach Elimination von P_k und Q_k vermöge (16)

$$\begin{aligned} &-2G_1\int_0^\infty\left[\Psi(\lambda)+\frac{1}{2\lambda}\Phi(\lambda)\right]\lambda\, J_0(\lambda r)\, d\lambda\;=\\ &=\begin{cases} 2G\left\{\dfrac{1-\nu}{1-2\nu}A+\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{p_k}{2(1-2\nu)}(\lambda_k h\, e^{-\lambda_k h}-\operatorname{Sin}\lambda_k h)-\frac{q_k}{2(1-2\nu)}(\lambda_k h\, e^{\lambda_k h}-\right.\right. & \\ \left.\left.-\operatorname{Sin}\lambda_k h)+c_k\operatorname{Cos}\lambda_k h\right] J_0(\lambda_k r)\right\} & \text{für} \quad r\le a,\\ 0 & ,, \quad r>a. \end{cases} \end{aligned} \tag{19}$$

Vermöge der *Hankel*schen Umkehrformel für $\varkappa=0, 1, 2, \ldots$

$$\int_0^\infty F(\lambda)\, J_\varkappa(\lambda r)\, \lambda\, d\lambda=\varphi(r)\,,\qquad F(\lambda)=\int_0^\infty \varphi(r)\, J_\varkappa(\lambda r)\, r\, dr \tag{20}$$

und der Integrale

$$\int_0^a J_0(\lambda r)\, r\, dr=\frac{a}{\lambda}\, J_1(\lambda a)\,,\qquad \int_0^a r\, J_0(\lambda_k r)\, J_0(\lambda r)\, dr=\frac{\lambda_a\, J_0(\lambda_k a)\, J_1(\lambda a)}{\lambda^2-\lambda_k^2}$$

erhalten wir aus (19)

$$\Psi(\lambda)+\frac{1}{2\lambda}\Phi(\lambda)=-\mu\left[\lambda a\, J_1(\lambda a)\sum_{k=1}^{\infty}C_k\,\frac{J_0(\lambda_k a)}{\lambda^2-\lambda_k^2}+\frac{(1-\nu)\,A\,a\,J_1(\lambda a)}{(1-2\nu)\,\lambda}\right], \tag{21}$$

wobei zur Abkürzung

$$C_k=\frac{p_k}{2(1-2\nu)}(\lambda_k h\, e^{-\lambda_k h}-\operatorname{Sin}\lambda_k h)-\frac{q_k}{2(1-2\nu)}(\lambda_k h\, e^{\lambda_k h}-\operatorname{Sin}\lambda_k h)+c_k\operatorname{Cos}\lambda_k h \tag{22}$$

und

$$\mu=\frac{G}{G_1} \tag{23}$$

eingeführt wurden.

[1] Siehe Fußnote auf S. 342.

Die Randbedingung (7) fordert das Bestehen der Gleichung

$$\int_0^\infty \Psi(\lambda) J_0(\lambda r)\, d\lambda = \sum_{k=1}^{\infty} \Big\{ \frac{-p_k}{2(1-2\nu)} \left[(3-4\nu+2\lambda_k h) e^{-\lambda_k h} + e^{\lambda_k h}\right] + \\ + \frac{q_k}{2(1-2\nu)} \left[(3-4\nu-2\lambda_k h) e^{\lambda_k h} + e^{-\lambda_k h}\right] + 2 c_k \operatorname{Sin} \lambda_k h \Big\} \frac{J_0(\lambda_k r)}{2\lambda_k} + Ah + B,$$

woraus sich nach Multiplikation mit $r\,dr$ bzw. $J_0(\lambda_n r)\, r\,dr$ und Integration von $r=0$ bis $r=a$ die Beziehungen

$$\int_0^\infty \Psi(\lambda) J_1(\lambda a) \frac{d\lambda}{\lambda} = (Ah+B)\frac{a}{2} \tag{24}$$

bzw.

$$\int_0^\infty \frac{\lambda \Psi(\lambda) J_1(\lambda a)\, d\lambda}{\lambda^2 - \lambda_n^2} = \frac{a J_0(\lambda_n a)}{4\lambda_n} D_n \tag{25}$$

ergeben, wobei

$$\left.\begin{aligned} D_n = &-\frac{p_n}{2(1-2\nu)} \left[(3-4\nu+2\lambda_n h) e^{-\lambda_n h} + e^{\lambda_n h}\right] + \\ &+ \frac{q_n}{2(1-2\nu)} \left[(3-4\nu-2\lambda_n h) e^{\lambda_n h} + e^{-\lambda_n h}\right] + 2 c_n \operatorname{Sin} \lambda_n h \end{aligned}\right| \tag{26}$$

bedeutet. Aus (8) ergibt sich mit der Abkürzung

$$\left.\begin{aligned} A_k = &\frac{p_k}{2(1-2\nu)} \left[(2\lambda_k h - 1) e^{-\lambda_k h} + e^{\lambda_k h}\right] + \\ &+ \frac{q_k}{2(1-2\nu)} \left[(2\lambda_k h + 1) e^{\lambda_k h} - e^{-\lambda_k h}\right] - 2 c_k \operatorname{Sin} \lambda_k h \end{aligned}\right| \tag{27}$$

die Beziehung

$$-2\int_0^\infty \left[\Psi(\lambda) + \frac{(1-\nu_1)\Phi(\lambda)}{(1-2\nu_1)\lambda}\right] \lambda J_1(\lambda r)\, d\lambda = \begin{cases} \mu \sum_{k=1}^{\infty} A_k J_1(\lambda_k r) & \text{für } r \le a, \\ 0 & \text{„ } r > a. \end{cases}$$

Wenden wir auf diese Beziehung die *Hankel*sche Umkehrformel (20) — für $\alpha=1$ — an, so erhalten wir

$$\Psi(\lambda) + \frac{(1-\nu_1)\Phi(\lambda)}{(1-2\nu_1)\lambda} = -\frac{\mu}{2} \sum_{k=1}^{\infty} A_k \int_0^a r J_1(\lambda_k r) J_1(\lambda r)\, dr = -\frac{a\mu}{2} \sum_{k=1}^{\infty} A_k \lambda_k \frac{J_0(\lambda_k a) J_1(\lambda a)}{\lambda^2 - \lambda_k^2}. \tag{29}$$

Setzen wir den hieraus entnommenen Wert für $\Phi(\lambda)$ in (21) ein, so bekommen wir

$$\left.\begin{aligned} \Psi(\lambda) = &\frac{\mu}{2} a(1-2\nu_1) J_1(\lambda a) \sum_{k=1}^{\infty} A_k \lambda_k \frac{J_0(\lambda_k a)}{\lambda^2 - \lambda_k^2} - \\ &- 2\mu(1-\nu_1) a \left[\lambda J_1(\lambda a) \sum_{k=1}^{\infty} C_k \frac{J_0(\lambda_k a)}{\lambda^2 - \lambda_k^2} + \frac{(1-\nu) A J_1(\lambda a)}{(1-2\nu)\lambda}\right]. \end{aligned}\right| \tag{30}$$

Diese Gleichung mit $J_1(\lambda a)\frac{d\lambda}{\lambda}$ multipliziert und zwischen 0 und ∞ integriert, ergibt mit Rücksicht auf (24)

$$\left.\begin{aligned} \int_0^\infty \Psi(\lambda) J_1(\lambda a) \frac{d\lambda}{\lambda} = \frac{a}{2}(Ah+B) = &\frac{\mu}{2} a(1-2\nu_1) \sum_{k=1}^{\infty} A_k \lambda_k J_0(\lambda_k a) \int_0^\infty \frac{J_1^2(\lambda a)\, d\lambda}{\lambda(\lambda^2 - \lambda_k^2)} - \\ &- 2\mu(1-\nu_1) a \left[\sum_{k=1}^{\infty} C_k J_0(\lambda_k a) \int_0^\infty \frac{J_1^2(\lambda a)\, d\lambda}{\lambda^2 - \lambda_k^2} + \frac{(1-\nu) A}{1-2\nu} \int_0^\infty \frac{J_1^2(\lambda a)\, d\lambda}{\lambda^2}\right]. \end{aligned}\right| \tag{31}$$

Die Gleichung (30) mit $\frac{\lambda J_1(\lambda a) d\lambda}{\lambda^2 - \lambda_n^2}$ multipliziert und zwischen $\lambda=0$ bis $\lambda=\infty$ integriert, liefert

unter Heranziehung von (25)

$$\left.\begin{aligned}\frac{J_0(\lambda_n a)}{4\lambda_n} D_n = \frac{\mu}{2}(1-2\nu_1)\sum_{k=1}^{\infty} A_k \lambda_k J_0(\lambda_k a)\int_0^{\infty} \frac{\lambda J_1^2(\lambda a)\,d\lambda}{(\lambda^2-\lambda_k^2)(\lambda^2-\lambda_n^2)} - \\ -2\mu(1-\nu_1)\left[\sum_{k=1}^{\infty} C_k J_0(\lambda_k a)\int_0^{\infty}\frac{\lambda^2 J_1^2(\lambda a)\,d\lambda}{(\lambda^2-\lambda_k^2)(\lambda^2-\lambda_n^2)} + \frac{(1-\nu)A}{1-2\nu}\int_0^{\infty}\frac{J_1^2(\lambda a)\,d\lambda}{\lambda^2-\lambda_n^2}\right].\end{aligned}\right\} \tag{32}$$

Denkt man sich hier D_n, A_k und C_k (gemäß (26), (27) und (22)) eingesetzt, so ergibt sich für $n = 1, 2, 3, \ldots$ ein unendliches, lineares Gleichungssystem für die noch unbekannten Koeffizienten $p_1, p_2, \ldots$ und $q_1, q_2, \ldots$, zu dessen Auflösung offenbar noch ein lineares System benötigt wird und das muß aus (9) folgen. Zunächst liefert diese Forderung

$$\left.\begin{aligned}\int_0^{\infty}\left[\Psi(\lambda)+\frac{(3-4\nu_1)\Phi(\lambda)}{2(1-2\nu_1)\lambda}\right]J_1(\lambda r)\,d\lambda = \\ =\sum_{k=1}^{\infty}\left\{\left[P_k+\frac{(3-4\nu)p_k}{2(1-2\nu)\lambda_k h}\right]e^{-\lambda_k h}+\right. \\ \left.+\left[-Q_k+\frac{(3-4\nu)q_k}{2(1-2\nu)\lambda_k h}\right]e^{\lambda_k h}-\frac{h}{2(1-2\nu)}\left(p_k e^{-\lambda_k h}-q_k e^{\lambda_k h}\right)\right\}J_1(\lambda_k r)\,. \qquad (r\le a).\end{aligned}\right\} \tag{33}$$

Setzt man hier nach (16) P_k und Q_k ein, so ergibt sich

$$\int_0^{\infty}\left[\Psi(\lambda)+\frac{(3-4\nu_1)\Phi(\lambda)}{2(1-2\nu_1)\lambda}\right]J_1(\lambda r)\,d\lambda = \sum_{k=1}^{\infty} B_k J_1(\lambda_k r)\,,\ (r\le a)\,, \tag{34}$$

wobei zur Abkürzung

$$\left.\begin{aligned}B_k = \frac{p_k}{4(1-2\nu)\lambda_k}\left[(3-4\nu-2\lambda_k h)\,e^{-\lambda_k h}+e^{\lambda_k h}\right]+ \\ +\frac{q_k}{4(1-2\nu)\lambda_k}\left[(3-4\nu+2\lambda_k h)\,e^{\lambda_k h}+e^{-\lambda_k h}\right]-\frac{c_k}{\lambda_k}\mathfrak{Cof}\,\lambda_k h\end{aligned}\right| \tag{35}$$

gesetzt wurde. Die Gleichung (34) mit $J_1(\lambda_n r)\,r\,dr$ multipliziert und über den Gültigkeitsbereich ($r = 0 \ldots a$) integriert, liefert

$$\int_0^{\infty}\left[\Psi(\lambda)+\frac{(3-4\nu_1)\,\Phi(\lambda)}{2(1-2\nu_1)\lambda}\right]\frac{\lambda_n a\,J_0(\lambda_n a)\,J_1(\lambda a)\,d\lambda}{\lambda^2-\lambda_n^2} = B_n\frac{a^2}{2}\,J_0^2(\lambda_n a)\,. \tag{36}$$

Setzen wir hier den aus (29) entnommenen Wert für $\Phi(\lambda)$ ein, so bekommen wir

$$\int_0^{\infty}\Psi(\lambda)\frac{J_1(\lambda a)\,d\lambda}{\lambda^2-\lambda_n^2} = -\frac{a B_n J_0(\lambda_n a)(1-\nu_1)}{(1-2\nu_1)\lambda_n}-\frac{(3-4\nu_1)\,a\,\mu}{2(1-2\nu_1)}\sum_{k=1}^{\infty}A_k\lambda_k J_0(\lambda_k a)\int_0^{\infty}\frac{J_1^2(\lambda a)\,d\lambda}{(\lambda^2-\lambda_k^2)(\lambda^2-\lambda_n^2)}\,. \tag{37}$$

Nun wird die Gleichung (30) mit $\frac{J_1(\lambda a)\,d\lambda}{\lambda^2-\lambda_n^2}$ multipliziert von $\lambda = 0$ bis $\lambda = \infty$ integriert, woraus man mit (37)

$$\left.\begin{aligned}\frac{J_0(\lambda_n a)B_n}{(1-2\nu_1)\lambda_n} = 2\mu\left[\sum_{k=1}^{\infty}C_k J_0(\lambda_k a)\int_0^{\infty}\frac{\lambda J_1^2(\lambda a)\,d\lambda}{(\lambda^2-\lambda_k^2)(\lambda^2-\lambda_n^2)}+\right. \\ \left.+\frac{(1-\nu)A}{1-2\nu}\int_0^{\infty}\frac{J_1^2(\lambda a)\,d\lambda}{\lambda(\lambda^2-\lambda_n^2)}-\frac{1-\nu_1}{1-2\nu_1}\sum_{k=1}^{\infty}A_k\lambda_k J_0(\lambda_k a)\int_0^{\infty}\frac{J_1^2(\lambda a)\,d\lambda}{(\lambda^2-\lambda_k^2)(\lambda^2-\lambda_n^2)}\right]\end{aligned}\right\} \tag{38}$$

das zweite lineare Gleichungssystem für die p_k bzw. q_k gewinnt. Benutzen wir anstatt (9) die Randbedingung (9a), so erhalten wir

$$\left.\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\infty}A_k J_1(\lambda_k r) = 2f_0\left\{\frac{1-\nu}{1-2\nu}A+\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{p_k}{2(1-2\nu)}(\lambda_k h e^{-\lambda_k h}-\mathfrak{Sin}\,\lambda_k h)-\right.\right. \\ \left.\left.-\frac{q_k}{2(1-2\nu)}(\lambda_k h e^{\lambda_k h}-\mathfrak{Sin}\,\lambda_k h)+c_k\,\mathfrak{Cof}\,\lambda_k h\right]J_0(\lambda_k r)\right\}.\end{aligned}\right\} \tag{33a}$$

Und diese Gleichung mit $r J_0(\lambda_n r)\,dr$ bzw. $r\,dr$ multipliziert und zwischen $r = 0$ und $r = a$ integriert,

liefert das in diesem Falle an Stelle von (38) tretende Gleichungssystem

$$\left.\begin{aligned}&\sum_{k=1}^{\infty} A_k \int_0^a r\, J_1(\lambda_k r)\, J_0(\lambda_n r)\, dr = a^2 f_0 \left[\frac{p_n}{2(1-2\nu)}\left(\lambda_n h\, e^{-\lambda_n h} - \operatorname{Sin}\lambda_n h\right) - \right.\\ &\left. - \frac{q_n}{2(1-2\nu)}\left(\lambda_n h\, e^{\lambda_n h} - \operatorname{Sin}\lambda_n h\right) + c_n \operatorname{Cof}\lambda_n h\right] J_0^2(\lambda_n a)\,,\\ &\sum_{k=1}^{\infty} A_k \int_0^a J_1(\lambda_k r)\, dr = f_0 \frac{1-\nu}{1-2\nu} A\,.\end{aligned}\right\} \tag{38a}$$

Nach Auflösung von (32) und (38) — worüber noch zu sprechen sein wird — sind auch die anderen Koeffizienten bestimmbar: P_k und Q_k aus (16), B aus (24), nachdem man $\Psi(\lambda)$ aus (30) berechnet hatte. Zum Schluß kann $\Phi(\lambda)$ aus (29) ermittelt werden. Damit ist aber der Verformungs- und Spannungszustand in der Platte und Unterlage festgelegt, ohne daß man die Randbedingung (10) erfüllt hätte; also derselbe Umstand wie in *Szabó*[1]. (Für die fest eingespannte Platte mit der an Stelle von (10) tretenden Randbedingung (10a) wäre dagegen das Problem schon gelöst, da (12) der Forderung (10a) genügt.) Die Erfüllung der lokalen Spannungsfreiheit des Plattenmantels für die freigelagerte Platte ist auch hier mit den verwendeten Funktionen nur im Sinne des *de Saint-Venant*schen Prinzips möglich und dieser Frage wollen wir uns jetzt zuwenden.

4. Radialspannung und Radialmoment am Plattenmantel. Da die Randbedingung (10) — $\sigma_r(a, z) = 0$ — nicht erfüllt ist, herrscht am Plattenmantel eine mittlere Radialspannung, die sich aus (2), (11), (12), (16) und unter Berücksichtigung von (27) zu

$$\bar{\sigma}_r = \frac{1}{h}\int_0^h \sigma_r(a, z)\, dz = G\left[\sum_{k=1}^{\infty} A_k \frac{J_0(\lambda_k a)}{\lambda_k h} + \frac{2\nu A}{1-2\nu}\right] \tag{39}$$

errechnen läßt, während man für das Radialmoment

$$\left.\begin{aligned}m_R = \int_0^h \sigma_r(a, z)\, z\, dz = G h^2 \Big\{ &\frac{A\nu}{1-2\nu} + \sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{p_k}{1-2\nu}\left(e^{-\lambda_k h} + \frac{1}{\lambda_k h}\operatorname{Cof}\lambda_k h - \frac{1}{\lambda_k^2 h^2}\operatorname{Sin}\lambda_k h\right) + \right.\\ &+ \frac{q_k}{1-2\nu}\left(e^{\lambda_k h} - \frac{1}{\lambda_k h}\operatorname{Cof}\lambda_k h + \frac{1}{\lambda_k^2 h^2}\operatorname{Sin}\lambda_k h\right) - \\ &\left. - 2 c_k\left(\frac{1}{\lambda_k h}\operatorname{Sin}\lambda_k h + \frac{1}{\lambda_k^2 h^2}(1 - \operatorname{Cof}\lambda_k h)\right)\right] J_0(\lambda_k a)\Big\}\end{aligned}\right\} \tag{40}$$

erhält. Am Plattenmantel haben wir also das äquivalente Kräftesystem

$$\left.\begin{aligned}\bar{\sigma}_r = G\left[\sum_{k=1}^{\infty} A_k \frac{J_0(\lambda_k a)}{\lambda_k h} + \frac{2\nu A}{1-2\nu}\right] = 2G\Big\{&\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{p_k}{2(1-2\nu)}\left(\lambda_k h\, e^{-\lambda_k h} + \operatorname{Sin}\lambda_k h\right) + \right.\\ &\left. + \frac{q_k}{2(1-2\nu)}\left(\lambda_k h\, e^{\lambda_k h} + \operatorname{Sin}\lambda_k h\right) - c_k \operatorname{Sin}\lambda_k h\right]\frac{J_0(\lambda_k a)}{\lambda_k h} + \frac{A\nu}{1-2\nu}\Big\},\end{aligned}\right\} \tag{41}$$

$$\left.\begin{aligned}\bar{m}_R = m_R - \bar{\sigma}_r\frac{h^2}{2} = G h^2 \sum_{k=1}^{\infty}\Big\{&\frac{p_k}{2(1-2\nu)}\left(\lambda_k^2 h^2 e^{-\lambda_k h} + 2\lambda_k h \operatorname{Cof}\lambda_k h - \lambda_k h \operatorname{Sin}\lambda_k h - \right.\\ &- 2\operatorname{Sin}\lambda_k h) + \frac{q_k}{2(1-2\nu)}\left(\lambda_k^2 h^2 e^{\lambda_k h} - 2\lambda_k h \operatorname{Cof}\lambda_k h - \lambda_k h \operatorname{Sin}\lambda_k h + \right.\\ &\left. + 2\operatorname{Sin}\lambda_k h) - c_k[\lambda_k h \operatorname{Sin}\lambda_k h + 2(1 - \operatorname{Cof}\lambda_k h)]\Big\}\frac{J_0(\lambda_k a)}{\lambda_k^2 h^2}\,.\end{aligned}\right\} \tag{42}$$

5. Die Erfüllung der Randbedingung am Plattenmantel im Sinne des de Saint-Venantschen-Prinzips. Das durch (41) und (42) gegebene System der Resultierenden der „Restspannungen" in radialer Richtung kann durch den gleichmäßigen Zug (oder Druck) — $\bar{\sigma}_r$ und durch die reine Biegung — $\bar{m}_R$ zum Verschwinden gebracht werden, wodurch der Randbedingung (10) „im Gesamten" — wenn auch nicht lokal — genügt wird. Die zu den Lasten gehörigen Deformationen — bzw. Verschiebungen — sind nach *Szabó*[1]

$$\left.\begin{aligned}\zeta' &= \frac{-\nu\bar{\sigma}_r}{(1+\nu)G}\left(\frac{h}{2} - z\right), & \varrho' &= \frac{-(1-\nu)\bar{\sigma}_r}{2G(1+\nu)} r,\\ \zeta'' &= \frac{3\bar{m}_R\left[2\nu\left(z - \frac{h}{2}\right)^2 + (1-\nu)r^2\right]}{(1+\nu)Gh^3}, & \varrho'' &= \frac{-6\bar{m}_R(1-\nu)\left(z - \frac{h}{2}\right)r}{(1+\nu)Gh^3},\end{aligned}\right\} \tag{43}$$

[1] Siehe Fußnote auf S. 342.

und somit ergeben sich nach (2) die Spannungen zu

$$\left.\begin{aligned} &\sigma_z' = 0\,, \qquad \tau' = 0\,, \qquad \sigma_r' = \sigma_t' = -\,\bar{\sigma}_r\,, \\ &\sigma_z'' = 0\,, \qquad \tau'' = 0\,, \qquad \sigma_r'' = \sigma_t'' = -\,\frac{12\,m_R}{h^3}\left(z - \frac{h}{2}\right). \end{aligned}\right\} \tag{44}$$

Durch diesen zusätzlichen Spannungs- und Deformationszustand werden die aus den Randbedingungen (7) und (9) fließenden Formeln geändert. An Stelle der aus (7) folgenden Gleichung (24) tritt jetzt

$$\int_0^\infty \Psi(\lambda) J_1(\lambda a)\,\frac{d\lambda}{\lambda} = \frac{a}{2}\left\{A h + B + \frac{\bar{\sigma}_r h \nu}{2G(1+\nu)} + \frac{3\,m_R[\nu h^2 + a^2(1-\nu)]}{2G(1+\nu)h^3}\right\}, \tag{45}$$

während die zur Berechnung von B dienende Beziehung (31) durch

$$\left.\begin{aligned} &\frac{a}{2}\left\{A h + B + \frac{\nu \bar{\sigma}_r h}{2G(1+\nu)} + \frac{3\,m_R[\nu h^2 + a^2(1-\nu)]}{2G(1+\nu)h^3}\right\} = \\ &\quad = \frac{\mu a}{2}(1-2\nu_1)\sum_{k=1}^{\infty} A_k \lambda_k J_0(\lambda_k a)\int_0^\infty \frac{J_1^2(\lambda a)\,d\lambda}{\lambda(\lambda^2-\lambda_k^2)} - \\ &\quad - 2\,\mu a(1-\nu_1)\left[\sum_{k=1}^{\infty} C_k\, J_0(\lambda_k a)\int_0^\infty \frac{J_1^2(\lambda a)\,d\lambda}{\lambda^2-\lambda_k^2} + \frac{(1-\nu)A}{1-2\nu}\int_0^\infty \frac{J_1^2(\lambda a)\,d\lambda}{\lambda^2}\right] \end{aligned}\right\} \tag{46}$$

zu ersetzen ist. Als letzte der aus (7) fließenden Gleichungen ist (32) in

$$\left.\begin{aligned} &\frac{J_0(\lambda_n a) D_n}{4\lambda_n} = -\frac{6\,\bar{m}_R(1-\nu)}{G(1+\nu)h^3\lambda_n^2} + \frac{\mu(1-2\nu_1)}{2}\sum_{k=1}^{\infty} A_k \lambda_k J_0(\lambda_k a)\int_0^\infty \frac{\lambda J_1^2(\lambda a)\,d\lambda}{(\lambda^2-\lambda_k^2)(\lambda^2-\lambda_n^2)} - \\ &\quad - 2\,\mu(1-\nu_1)\left[\sum_{k=1}^{\infty} C_k J_0(\lambda_k a)\int_0^\infty \frac{\lambda^2 J_1^2(\lambda a)\,d\lambda}{(\lambda^2-\lambda_k^2)(\lambda^2-\lambda_n^2)} + \frac{(1-\nu)A}{1-2\nu}\int_0^\infty \frac{J_1^2(\lambda a)\,d\lambda}{\lambda^2-\lambda_n^2}\right] \end{aligned}\right\} \tag{47}$$

umzuändern. An Stelle der sich aus (9) ergebenden Gleichung (34) tritt

$$\int_0^\infty \left[\Psi(\lambda) + \frac{(3-4\nu_1)\Phi(\lambda)}{2(1-2\nu_1)\lambda}\right] J_1(\lambda r)\,d\lambda = \sum_{k=1}^{\infty} B_k J_1(\lambda_k r) - \frac{(1-\nu)\bar{\sigma}_r}{2G(1+\nu)}\,r - \frac{3\,\bar{m}_R(1-\nu)\,r}{G(1+\nu)h^2}\,, \tag{48}$$

womit man genau so wie mit (34) verfährt und schließlich zu der an Stelle von (38) tretenden Gleichung

$$\left.\begin{aligned} &\frac{J_0(\lambda_n a) B_n}{(1-2\nu_1)\lambda_n} + \frac{(1-\nu)(\bar{\sigma}_r h^2 + 6\,\bar{m}_R)}{G(1+\nu)(1-2\nu_1)\lambda_n^2 h^2} = 2\,\mu\left[\frac{(1-\nu)A}{1-2\nu}\int_0^\infty \frac{J_1^2(\lambda a)\,d\lambda}{\lambda(\lambda^2-\lambda_n^2)} + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{k=1}^{\infty} C_k J_0(\lambda_k a)\int_0^\infty \frac{\lambda J_1^2(\lambda a)\,d\lambda}{(\lambda^2-\lambda_k^2)(\lambda^2-\lambda_n^2)} - \frac{1-\nu_1}{1-2\nu_1}\sum_{k=1}^{\infty} A_k \lambda_k J_0(\lambda_k a)\int_0^\infty \frac{J_1^2(\lambda a)\,d\lambda}{(\lambda^2-\lambda_k^2)(\lambda^2-\lambda_n^2)}\right] \end{aligned}\right\} \tag{49}$$

kommt.

6. Das System der unendlich vielen linearen Gleichungen für die Koeffizienten p_k und q_k. Dieses System ist durch die Gleichungen (47) und (49) gegeben und wir wenden uns der Frage seiner Auflösbarkeit zu. Die in den Gleichungen (47) und (49) vorkommenden uneigentlichen Integrale

$$\left.\begin{aligned} &\int_0^\infty \frac{J_1^2(\lambda a)\,d\lambda}{\lambda^2-\lambda_n^2} = a\int_0^\infty \frac{J_1^2(t)\,dt}{t^2-t_n^2} = a\,I_n\,, \qquad \int_0^\infty \frac{\lambda^2 J_1^2(\lambda a)\,d\lambda}{(\lambda^2-\lambda_k^2)(\lambda^2-\lambda_n^2)} = a\int_0^\infty \frac{t^2 J_1^2(t)\,dt}{(t^2-t_k^2)(t^2-t_n^2)} = a\,I_{kn}\,, \\ &\int_0^\infty \frac{J_1^2(\lambda a)\,d\lambda}{\lambda(\lambda^2-\lambda_n^2)} = a^2\int_0^\infty \frac{J_1^2(t)\,dt}{t(t^2-t_n^2)} = a^2 I_n^{(1)}\,, \qquad \int_0^\infty \frac{\lambda J_1^2(\lambda a)\,d\lambda}{(\lambda^2-\lambda_k^2)(\lambda^2-\lambda_n^2)} = a^2\int_0^\infty \frac{t J_1^2(t)\,dt}{(t^2-t_k^2)(t^2-t_n^2)} = a^2 I_{kn}^{(1)}\,, \\ &\int_0^\infty \frac{J_1^2(\lambda a)\,d\lambda}{(\lambda^2-\lambda_k^2)(\lambda^2-\lambda_n^2)} = a^3\int_0^\infty \frac{J_1^2(t)\,dt}{(t^2-t_k^2)(t^2-t_n^2)} = a^3 I_{kn}^{(2)} \end{aligned}\right\} \tag{50}$$

erweisen sich — wie man durch Heranziehung der Potenz- bzw. asymptotischen Reihen leicht zeigen kann — als existent und I_n bzw. I_{kn} sind in *Szabó*[1] schon berechnet worden. Auch für die neu hinzugekommenen $I_n^{(1)}$, $I_{kn}^{(1)}$ und $I_{kn}^{(2)}$ lassen sich ähnliche Formeln wie für I_n und I_{kn} angeben, sie erweisen sich aber bei der numerischen Berechnung der Integrale gegenüber der *Simpson*schen Methode so unterlegen, daß auf die Mitteilung dieser Formeln hier verzichtet werden kann.

Die numerischen Auswertungen ergaben folgende Resultate[2]:

n	1	2	3	4
$I_n^{(1)}$	—0,03405	—0,01018	—0,00478	—0,00282
$I_{n_1}^{(1)}$	0,03402	0,00001	—0,00002	—0,00003
$I_{n_2}^{(1)}$	0,00001	0,01015	—0,00007	—0,00001
$I_{n_3}^{(1)}$	—0,00002	—0,00007	0,00482	—0,00001
$I_{n_4}^{(1)}$	—0,00003	—0,00001	—0,00001	0,00282
$I_{n_1}^{(2)}$	0,01125	0,00083	0,00041	0,00024
$I_{n_2}^{(2)}$	0,00083	0,00172	0,00014	0,00008
$I_{n_3}^{(2)}$	0,00041	0,00014	0,00054	0,00005
$I_{n_4}^{(2)}$	0,00024	0,00008	0,00005	0,00024

Setzen wir in (47) und (49) für A_k, B_k, C_k, D_n, $\bar{\sigma}_r$ und $\bar{m}_R$ die Gleichungen (27), (35), (22), (26), (41) und (42) ein, so erhalten wir nach Einführung der Abkürzungen

$$
\left.\begin{aligned}
N^{(1)}(\lambda_n) &= \frac{J_0(\lambda_n a)}{4\lambda_n(1-2\nu)}\left[(1-2\nu+\lambda_n h)e^{-\lambda_n h}+\mathfrak{Coj}\,\lambda_n h\right],\\
N^{(2)}(\lambda_n) &= \frac{J_0(\lambda_n a)}{2\lambda_n^2(1-2\nu)}\left[(1-2\nu-\lambda_n h)e^{-\lambda_n h}+\mathfrak{Coj}\,\lambda_n h\right],\\
F_n^{(1)}(\lambda_k) &= -\frac{3(1-\nu)}{(1+\nu)h^3\lambda_n^2\lambda_k^2}\left(\lambda_k^2 h^2 e^{-\lambda_k h}+\lambda_k h\left[e^{-\lambda_k h}+\mathfrak{Coj}\,\lambda_k h\right]-2\,\mathfrak{Sin}\,\lambda_k h\right)+\\
&\quad+\frac{\mu}{2}(1-2\nu_1)\left(\lambda_k h e^{-\lambda_k h}+\mathfrak{Sin}\,\lambda_k h\right)\lambda_k a^2 I_{kn}^{(1)}-\mu(1-\nu_1)\left(\lambda_k h e^{-\lambda_k h}-\mathfrak{Sin}\,\lambda_k h\right)a\,I_{nk},\\
F_n^{(2)}(\lambda_k) &= -\frac{2(1-\nu)}{(1+\nu)h^2\lambda_n^2\lambda_k^2}\left[2\lambda_k^2 h^2 e^{-\lambda_k h}+\lambda_k h\left(e^{-\lambda_k h}+2\,\mathfrak{Coj}\,\lambda_k h\right)-3\,\mathfrak{Sin}\,\lambda_k h\right]+\\
&\quad+\mu(1-2\nu_1)\left(\lambda_k h e^{-\lambda_k h}-\mathfrak{Sin}\,\lambda_k h\right)a^2 I_{kn}^{(1)}-2\mu(1-\nu_1)\left(\lambda_k h e^{-\lambda_k h}+\mathfrak{Sin}\,\lambda_k h\right)\lambda_k a^3 I_{kn}^{(2)}
\end{aligned}\right\}\quad(51)
$$

das Gleichungssystem

$$
\left.\begin{aligned}
&p_n-q_n\frac{(1-2\nu-\lambda_n h)e^{\lambda_n h}+\mathfrak{Coj}\,\lambda_n h}{(1-2\nu+\lambda_n h)e^{-\lambda_n h}+\mathfrak{Coj}\,\lambda_n h}-c_n\frac{2(1-2\nu)\,\mathfrak{Sin}\,\lambda_n h}{(1-2\nu+\lambda_n h)e^{-\lambda_n h}+\mathfrak{Coj}\,\lambda_n h}+\\
&+\sum_{k=1}^{\infty}p_k\frac{J_0(\lambda_k a)}{N^{(1)}(\lambda_n)(1-2\nu)}F_n^{(1)}(\lambda_k)+\sum_{k=1}^{\infty}c_k\frac{J_0(\lambda_k a)}{N^{(1)}(\lambda_k)}\Big\{\frac{6(1-\nu)}{(1+\nu)h^3\lambda_n^2\lambda_k^2}\left[\lambda_k h\,\mathfrak{Sin}\,\lambda_k h+\right.\\
&\left.+2(1-\mathfrak{Coj}\,\lambda_k h)\right]-\mu(1-2\nu_1)\lambda_k a^2 I_{kn}^{(1)}\,\mathfrak{Sin}\,\lambda_k h-2\mu(1-\nu_1)\,a\,I_{kn}\,\mathfrak{Coj}\,\lambda_k h\Big\}\\
&-\frac{2\mu(1-\nu_1)(1-\nu)}{(1-2\nu)N^{(1)}(\lambda_n)}A\,a\,I_n=0,
\end{aligned}\right\}\quad(52)
$$

[1] Siehe Fußnote auf S. 342.

[2] Die Mittel, zur Durchführung dieser und noch weiteren Aufgaben, worüber in einer — eingangs erwähnten — Mitteilung berichtet werden wird, sind mir von der Notgemeinschaft und den Freunden der TU Berlin-Charlottenburg dankenswerterweise zur Verfügung gestellt worden.

$$
\left.\begin{aligned}
&-p_n-q_n\frac{(1-2\nu+\lambda_n h)e^{\lambda_n h}+\mathfrak{Cof}\,\lambda_n h}{(1-2\nu-\lambda_n h)e^{-\lambda_n h}+\mathfrak{Cof}\,\lambda_n h}+c_n\frac{2(1-2\nu)\mathfrak{Cof}\,\lambda_n h}{(1-2\nu-\lambda_n h)e^{-\lambda_n h}+\mathfrak{Cof}\,\lambda_n h}+\\
&+\sum_{k=1}^{\infty}p_k\frac{J_0(\lambda_k a)}{N^{(2)}(\lambda_n)(1-2\nu)}F_n^{(2)}(\lambda_k)+\sum_{k=1}^{\infty}q_k\frac{J_0(\lambda_k a)}{(1-2\nu)N^{(2)}(\lambda_n)}F_n^{(2)}(-\lambda_k)+\\
&+\sum_{k=1}^{\infty}c_k\frac{J_0(\lambda_k a)}{N^{(2)}(\lambda_n)}\Big\{\frac{2(1-\nu)}{1+\nu}h^2\lambda_n^2\lambda_k^2[4\lambda_k h\,\mathfrak{Sin}\,\lambda_k h+6(1-\mathfrak{Cof}\,\lambda_k h)]+\\
&+2\mu(1-2\nu_1)a^2I_{kn}^{(1)}\mathfrak{Cof}\,\lambda_k h+4\mu(1-\nu_1)a^3\lambda_k I_{kn}^{(2)}\mathfrak{Sin}\,\lambda_k h\Big\}+\\
&+\frac{2\mu(1-2\nu_1)(1-\nu)}{(1-2\nu)N^{(2)}(\lambda_n)}a^2AI_n^{(1)}-\frac{2(1-\nu)\nu A}{(1+\nu)(1-2\nu)\lambda_n^2N^{(2)}(\lambda_n)}=0\,.
\end{aligned}\right\}\tag{53}
$$

Durch die Transformation

$$p_k=2c_k(1-2\nu)+\delta_k\,,\qquad q_k=\varepsilon_k\tag{54}$$

ergibt sich aus (52) und (53)

$$
\left.\begin{aligned}
&\delta_n-\varepsilon_n\frac{(1-2\nu-\lambda_n h)e^{\lambda_n h}+\mathfrak{Cof}\,\lambda_n h}{(1-2\nu+\lambda_n h_n)e^{-\lambda_n h}+\mathfrak{Cof}\,\lambda_n h}-2c_n(1-2\nu)\left[\frac{\mathfrak{Sin}\,\lambda_n h}{(1-2\nu+\lambda_n h)e^{-\lambda_n h}+\mathfrak{Cof}\,\lambda_n h}-1\right]+\\
&+\sum_{k=1}^{\infty}\delta_k\frac{J_0(\lambda_k a)}{(1-2\nu)N^{(1)}(\lambda_n)}F_n^{(1)}(\lambda_k)+\sum_{k=1}^{\infty}\varepsilon_k\frac{J_0(\lambda_k a)}{(1-2\nu)N^{(1)}(\lambda_n)}F_n^{(1)}(-\lambda_k)+\\
&+\sum_{k=1}^{\infty}c_k\frac{J_0(\lambda_k a)}{N^{(1)}(\lambda_n)}\Big\{2F_n^{(1)}(\lambda_k)+\frac{6(1-\nu)}{(1+\nu)\lambda_n^2\lambda_k^2h^3}[\lambda_k h\,\mathfrak{Sin}\,\lambda_k h+2(1-\mathfrak{Cof}\,\lambda_k h)]-\\
&-\mu(1-2\nu_1)a^2\lambda_k I_{kn}^{(1)}\mathfrak{Sin}\,\lambda_k h-2\mu(1-\nu_1)aI_{kn}\mathfrak{Cof}\,\lambda_k h\Big\}-\frac{2\mu(1-\nu_1)(1-\nu)}{(1-2\nu)N^{(1)}(\lambda_n)}AaI_n=0\,,
\end{aligned}\right\}\tag{55}
$$

$$
\left.\begin{aligned}
&-\delta_n-\varepsilon_n\frac{(1-2\nu+\lambda_n h)e^{\lambda_n h}+\mathfrak{Cof}\,\lambda_n h}{(1-2\nu-\lambda_n h)e^{-\lambda_n h}+\mathfrak{Cof}\,\lambda_n h}+2c_n(1-2\nu)\left[\frac{\mathfrak{Cof}\,\lambda_n h}{(1-2\nu-\lambda_n h)e^{-\lambda_n h}+e^{\lambda_n h}}-1\right]+\\
&+\sum_{k=1}^{\infty}\delta_k\frac{J_0(\lambda_k a)}{(1-2\nu)N^{(2)}(\lambda_n)}F_n^{(2)}(\lambda_k)+\sum_{k=1}^{\infty}\varepsilon_k\frac{J_0(\lambda_k a)}{(1-2\nu)N^{(2)}(\lambda_n)}F_n^{(2)}(-\lambda_k)+\\
&+\sum_{k=1}^{\infty}c_k\frac{J_0(\lambda_k a)}{N^{(2)}(\lambda_n)}\Big\{2F_n^{(2)}(\lambda_k)+\frac{2(1-\nu)}{(1+\nu)\lambda_n^2\lambda_k^2h^2}[4\lambda_k h\,\mathfrak{Sin}\,\lambda_k h+6(1-\mathfrak{Cof}\,\lambda_k h)]+\\
&+2\mu(1-2\nu_1)a^2I_{kn}^{(1)}\mathfrak{Cof}\,\lambda_k h+4\mu(1-\nu_1)\lambda_k a^3I_{kn}^{(2)}\mathfrak{Sin}\,\lambda_k h\Big\}+\\
&+\frac{2\mu(1-2\nu_1)(1-\nu)}{(1-2\nu)N^{(2)}(\lambda_n)}a^2AI_n^{(1)}-\frac{2(1-\nu)\nu A}{(1+\nu)(1-2\nu)\lambda_n^2N^{(2)}(\lambda_n)}=0\,.
\end{aligned}\right\}\tag{56}
$$

Bezüglich der Auflösbarkeit der Gleichungen (52) und (53) läßt sich aus dem durch die Transformation (54) entstandenen System (55) und (56) folgendes aussagen: Sowohl in (55) wie in (56) gehen die Konstanten (d. h. mit δ_k und ε_k nicht behafteten) Glieder von einem gewissen Zeilenindex N an gegen Null. Von diesem Zeilenindex an gehen für beide Systeme die Koeffizienten der δ_k und ε_k bis zu einem gewissen Spaltenindex $K<N$ gegen Null; folglich erhält man von der N-ten Zeile ab ein homogenes Gleichungssystem für $\delta_K, \delta_{K+1}, \ldots$ und $\varepsilon_K, \varepsilon_{K+1}, \ldots$ welches durch

$$\delta_K=\delta_{K+1}=\cdots=\varepsilon_K=\varepsilon_{K+1}=\cdots=0$$

gelöst werden kann, d. h. für großes k kann

$$p_k=2(1-2\nu)c_k\,,\qquad q_k=0\tag{57}$$

gesetzt werden, während die ersten Koeffizienten p_k und q_k so gewonnen werden, daß man aus (52) und (53) in der üblichen Weise ein endliches, lineares Gleichungssystem herleitet. Im Anschluß an das vorher Gesagte bedeutet das, daß wir aus den nach Abspaltung der homogenen Gleichungen übrig bleibenden $2N$ inhomogenen Gleichungen mit $2K(N>K)$ Unbekannten die ersten $2K$ Gleichungen mit den ersten $2K$ Unbekannten herausnehmen und auflösen. Dieses Vorgehen ist, was die c_k anbelangt, um so mehr erlaubt als doch jede Belastung $f(r)$

durch eine endliche *Bessel*reihe (im wesentlichen von der Form $\sum_{k=1}^{\infty} c_k J_0(\lambda_k r)$ beliebig genau approximiert werden kann, was das Verschwinden der c_k großer Nummer nach sich zieht. Da weiter $1/N^{(1)}(\lambda_n)$ und $1/N^{(2)}(\lambda_n)$ für große n sehr stark abnehmen, ist auch ihr Ersetzen durch Null erlaubt. Es bleiben dann endlich viele Gleichungen für endlich viele Unbekannte δ_n, ε_n übrig. Das Nichtverschwinden ihrer Determinante, das ihre Lösbarkeit sichert, erscheint dadurch gewährleistet, daß die zugehörigen homogenen Gleichungen ($A=0$) nach (13) der unbelasteten Platte (d.h. verschwindenden Verschiebungen) entsprechen. Daher sind dann $p_k=q_k=0$ die einzigen Lösungen der homogenen Gleichungen. Diese Überlegungen entheben uns der Mühe, der mathematisch schwierigen Frage nach den Lösungsbedingungen für das System der unendlich vielen linearen Gleichungen (55) und (56) mit unendlich vielen Unbekannten nachzugehen.

Mit dem *Kroneckers*chen Symbol

$$\delta_{nk} = \begin{cases} 0 \text{ für } k \neq n, \\ 1 \;\;,, \;\; k = n \end{cases} \tag{58}$$

läßt sich das Gleichungssystem (52), (53) auf die Normalform

$$\left.\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_{nk} p_k + \sum_{k=1}^{\infty} \beta_{nk} q_k &= \gamma_n, \\ \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} p_k + \sum_{k=1}^{\infty} b_{nk} q_n &= d_n \end{aligned}\right\} (n = 1, 2, \ldots) \tag{59}$$

bringen, wobei α_{nk}, β_{nk}, γ_n, a_{nk}, b_{nk} und d_n folgende Bedeutung haben:

$$\left.\begin{aligned} \alpha_{nk} = &-\frac{J_0(\lambda_n a)}{4(1-2\nu)\lambda_n}\left[(1-2\nu+\lambda_n h)\, e^{-\lambda_n h} + \mathfrak{Cof}\,\lambda_n h\right]\delta_{nk} + \\ &+ \frac{J_0(\lambda_k a)}{1-2\nu}\left\{\frac{3(1-\nu)}{(1+\nu)\lambda_n^2\lambda_k^2 h^3}\left[\lambda_k^2 h^2 e^{-\lambda_k h} + \lambda_k h\left(e^{-\lambda_k h} + \mathfrak{Cof}\,\lambda_k h\right) - 2\,\mathfrak{Sin}\,\lambda_k h\right] - \right. \\ &\left. - \frac{\mu}{2}(1-2\nu_1)\left(\lambda_k h\, e^{-\lambda_k h} + \mathfrak{Sin}\,\lambda_k h\right)\lambda_k a^2 I_{kn}^{(1)} + \mu(1-\nu_1)\left(\lambda_k h\, e^{-\lambda_k h} - \mathfrak{Sin}\,\lambda_k h\right) a I_{kn}\right\}, \end{aligned}\right\} \tag{60}$$

$$\left.\begin{aligned} \beta_{nk} = &\frac{J_0(\lambda_n a)}{4(1-2\nu)\lambda_n}\left[(1-2\nu-\lambda_n h)\, e^{\lambda_n h} + \mathfrak{Cof}\,\lambda_n h\right]\delta_{nk} + \\ &+ \frac{J_0(\lambda_k a)}{1-2\nu}\left\{\frac{3(1-\nu)}{(1+\nu)\lambda_n^2\lambda_k^2 h^3}\left[\lambda_k^2 h^2 e^{\lambda_k h} - \lambda_k h\left(e^{\lambda_k h} + \mathfrak{Cof}\,\lambda_k h\right) + 2\,\mathfrak{Sin}\,\lambda_k h\right] - \right. \\ &\left. - \frac{\mu}{2}(1-2\nu_1)\left(\lambda_k h\, e^{\lambda_k h} + \mathfrak{Sin}\,\lambda_k h\right)\lambda_k a^2 I_{kn}^{(1)} - \mu(1-\nu_1)\left(\lambda_k h\, e^{\lambda_k h} - \mathfrak{Sin}\,\lambda_k h\right) a I_{kn}\right\}, \end{aligned}\right\} \tag{53}$$

$$\left.\begin{aligned} \gamma_n = &-\frac{2\mu(1-\nu_1)(1-\nu)}{1-2\nu} A a I_n - \frac{\mathfrak{Sin}\,\lambda_n h}{2\lambda_n} J_0(\lambda_n a)\, c_n + \\ &+ 2\sum_{k=1}^{\infty} J_0(\lambda_k a)\left\{\frac{3(1-\nu)}{(1+\nu)\lambda_n^2\lambda_k^2 h^3}\cdot\left[\lambda_k h\,\mathfrak{Sin}\,\lambda_k h + 2(1-\mathfrak{Cof}\,\lambda_k h)\right] - \right. \\ &\left. - \frac{\mu}{2}(1-2\nu_1)\;\mathfrak{Sin}\,\lambda_k h\cdot\lambda_k a^2 I_{kn}^{(1)} - \mu(1-\nu_1)\,\mathfrak{Cof}\,\lambda_k h\cdot a I_{kn}\right\} c_k, \end{aligned}\right\} \tag{61}$$

$$\left.\begin{aligned} a_{nk} = &\frac{J_0(\lambda_n a)}{2(1-2\nu)\lambda_n^2}\left[(1-2\nu-\lambda_n h)\, e^{-\lambda_n h} + \mathfrak{Cof}\,\lambda_n h\right]\delta_{nk} + \\ &+ \frac{2J_0(\lambda_k a)}{1-2\nu}\left\{\frac{1-\nu}{(1+\nu)\lambda_n^2\lambda_k^2 h^2}\left[2\lambda_k^2 h^2 e^{-\lambda_k h} + \lambda_k h\left(e^{-\lambda_k h} + 2\,\mathfrak{Cof}\,\lambda_k h\right) - 3\,\mathfrak{Sin}\,\lambda_k h\right] - \right. \\ &\left. - \frac{\mu}{2}(1-2\nu_1)\left(\lambda_k h\, e^{-\lambda_k h} - \mathfrak{Sin}\,\lambda_k h\right) a^2 I_{kn}^{(1)} + \mu(1-\nu_1)\left(\lambda_k h\, e^{-\lambda_k h} + \mathfrak{Sin}\,\lambda_k h\right)\lambda_k a^3 I_{kn}^{(2)}\right\}, \end{aligned}\right\} \tag{62}$$

$$\left.\begin{aligned} b_{nk} = &\frac{J_0(\lambda_n a)}{2(1-2\nu)\lambda_n^2}\left[(1-2\nu+\lambda_n h)\, e^{\lambda_n h} + \mathfrak{Cof}\,\lambda_n h\right]\delta_{nk} + \\ &+ \frac{2J_0(\lambda_k a)}{1-2\nu}\left\{\frac{1-\nu}{(1+\nu)\lambda_n^2\lambda_k^2 h^2}\left[2\lambda_k^2 h^2 e^{\lambda_k h} - \lambda_k h\left(e^{\lambda_k h} + 2\,\mathfrak{Cof}\,\lambda_k h\right) + 3\,\mathfrak{Sin}\,\lambda_k h\right] + \right. \\ &\left. + \frac{\mu}{2}(1-2\nu_1)\left(\lambda_k h\, e^{\lambda_k h} - \mathfrak{Sin}\,\lambda_k h\right) a^2 I_{kn}^{(1)} + \mu(1-\nu_1)\left(\lambda_k h\, e^{\lambda_k h} + \mathfrak{Sin}\,\lambda_k h\right)\lambda_k a^3 I_{nk}^{(2)}\right\}, \end{aligned}\right\} \tag{63}$$

$$d_n = \frac{2\mu(1-2\nu_1)(1-\nu)}{1-2\nu} A a^2 I_n^{(1)} + \frac{J_0(\lambda_n a)}{\lambda_n^2} c_n \operatorname{Coj} \lambda_n h - \frac{2(1-\nu)\nu A}{(1+\nu)(1-2\nu)\lambda_n^2} + \\ + \sum_{k=1}^{\infty} J_0(\lambda_k a) \left\{ \frac{4(1-\nu)}{(1+\nu)\lambda_n^2 \lambda_k^2 h^2} [2\lambda_k h \operatorname{Sin} \lambda_k h + 3(1 - \operatorname{Coj} \lambda_k h)] + \right. \\ \left. + 2\mu(1-2\nu_1) a^2 I_{kn}^{(1)} \cdot \operatorname{Coj} \lambda_k h + 4\mu(1-\nu_1)\lambda_k a^3 I_{kn}^{(2)} \operatorname{Sin} \lambda_k h \right\} c_k . \tag{64}$$

Damit kann das gestellte Problem als gelöst angesehen werden.

7. Hinweise auf andere Lagerungen von achsensymmetrisch belasteten dicken Kreisplatten. Die in dieser Mitteilung angewandte Methode läßt sich auch für fest gestützte oder fest eingespannte dicke Kreisplatten unter rotationssymmetrischer Last verwenden, wenn man die Randbedingungen entsprechend ändert. Die Resultate werden gegenüber der elastischen Lagerung einfacher zu gewinnen sein.

a) Die frei gestützte dicke Kreisplatte. Das Problem ist für spezielle Belastungsfälle von *Timpe*[1] und *Ohlig*[2] behandelt worden. Die von diesen Verfassern formulierten Randbedingungen, insbesondere für den Plattenmantel, führen zwangsläufig zu dem Resultat, daß die Auflagekraft durch die am Plattenumfang auftretenden Schubspannungen aufgenommen wird. Da eine solche freie Lagerung physikalisch schwer realisierbar ist, soll hier eine andere — durch das *de Saint-Venantsche* Prinzip gerechtfertigte — Formulierung der Stützung erfolgen. Die gesamte achsensymmetrisch verteilte Last

$$P = 2\pi \int_0^a f(r)\, r\, dr = (a^2 - a_1^2)\pi p_0, \tag{65}$$

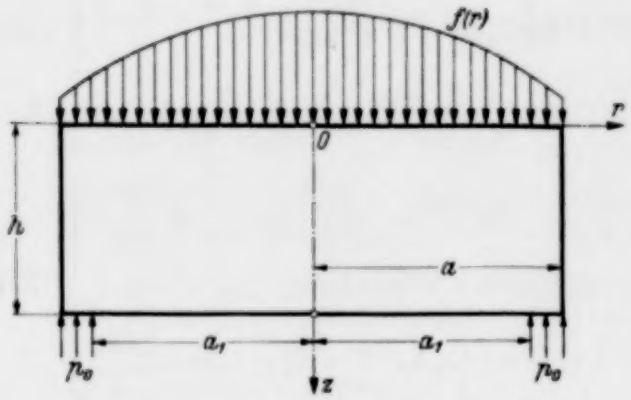


Abb. 3. Die freigelagerte achsensymmetrisch belastete dicke Kreisplatte.

soll in der Plattenebene $z = h$ auf eine schmale, ringförmige „Stützfläche", die in $r = a$ starr ist gleichmäßig übertragen werden (Abb. 3). Die Randbedingungen lauten

$$\tau(z, a) = 0 , \tag{66}$$

$$\sigma_z(0, r) = -f(r) , \tag{67}$$

$$\tau(0, r) = 0 , \tag{68}$$

$$\sigma_z(h, r) = \begin{cases} 0 & \text{für } r < a_1 , \\ -p_0 & \text{„ } r \geq a_1 . \end{cases} \tag{69}$$

$$\tau(h, r) = 0 , \tag{70}$$

$$\sigma_r(z, a) = 0 . \tag{71}$$

Mit Rücksicht auf die Forderung $\zeta(h, a) = 0$ und die Randbedingung (66) erhalten wir für die Verschiebungen aus (11) und (12)

$$\zeta = \sum_{k=1}^{\infty} \left[P_k e^{-\lambda_k z} + Q_k e^{\lambda_k z} - \frac{z}{2(1-2\nu)} \left(p_k e^{-\lambda_k z} + q_k e^{\lambda_k z}\right) \right] J_0(\lambda_k r) + A z - \\ - \sum_{k=1}^{\infty} \left[P_k e^{-\lambda_k h} + Q_k e^{\lambda_k h} - \frac{h}{2(1-2\nu)} \left(p_k e^{-\lambda_k h} + q_k e^{\lambda_k h}\right) \right] J_0(\lambda_k a) - A h , \tag{72}$$

$$\varrho = \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \left[P_k + \frac{(3-4\nu) p_k}{2(1-2\nu)\lambda_k} \right] e^{-\lambda_k z} + \left[-Q_k + \frac{(3-4\nu) q_k}{2(1-2\nu)\lambda_k} \right] e^{\lambda_k z} - \right. \\ \left. - \frac{z}{2(1-2\nu)} \left(p_k e^{-\lambda_k z} - q_k e^{\lambda_k z}\right) \right\} J_1(\lambda_k r) . \tag{73}$$

Die Randbedingungen (67) und (68) führen hier genau so wie bei der elastisch gelagerten Platte

[1] *A. Timpe*, Z. angew. Math. Mech. 4 (1924), S. 361.
[2] *R. Ohlig*, Ing.-Arch. 13 (1942), S. 155.

zu den Gleichungen (13) bis (15), bzw. (16), mit denen die Verschiebungen in

$$\left.\begin{aligned}\zeta = \sum_{k=1}^{\infty} \Big\{ & \frac{-p_k}{4\lambda_k(1-2\nu)}\left[(3-4\nu+2\lambda_k z)\,e^{-\lambda_k z}+e^{\lambda_k z}\right]+\\ & +\frac{q_k}{4\lambda_k(1-2\nu)}\left[e^{-\lambda_k z}+(3-4\nu-2\lambda_k z)\,e^{\lambda_k z}\right]+\frac{c_k}{\lambda_k}\operatorname{Sin}\lambda_k z\Big\} J_0(\lambda_k r)+Az-\\ & -\sum_{k=1}^{\infty}\Big\{\frac{-p_k}{4\lambda_k(1-2\nu)}\left[(3-4\nu+2\lambda_k h)\,e^{-\lambda_k h}+e^{\lambda_k h}\right]+\\ & +\frac{q_k}{4\lambda_k(1-2\nu)}\left[e^{-\lambda_k h}+(3-4\nu-2\lambda_k h)\,e^{\lambda_k h}\right]+\frac{c_k}{\lambda_k}\operatorname{Sin}\lambda_k h\Big\} J_0(\lambda_k a)-Ah\,,\end{aligned}\right\} \tag{72a}$$

$$\left.\begin{aligned}\varrho = \sum_{k=1}^{\infty}\Big\{ & \frac{p_k}{4\lambda_k(1-2\nu)}\left[(3-4\nu-2\lambda_k z)\,e^{-\lambda_k z}+e^{\lambda_k z}\right]+\\ & +\frac{q_k}{4\lambda_k(1-2\nu)}\left[(3-4\nu+2\lambda_k z)\,e^{\lambda_k z}+e^{-\lambda_k z}\right]-\frac{c_k}{\lambda_k}\operatorname{Cof}\lambda_k z\Big\} J_1(\lambda_k r)\end{aligned}\right\} \tag{73a}$$

übergehen, während aus (69) zunächst [s. Gleichung (19)]

$$\left.\begin{aligned}2G\Big\{\frac{1-\nu}{1-2\nu}A+\sum_{k=1}^{\infty}\Big[& \frac{p_k}{2(1-2\nu)}(\lambda_k h e^{-\lambda_k h}-\operatorname{Sin}\lambda_k h)-\frac{q_k}{2(1-2\nu)}(\lambda_k h e^{\lambda_k h}-\operatorname{Sin}\lambda_k h)+\\ & +c_k\operatorname{Cof}\lambda_k h\Big] J_0(\lambda_k r)\Big\} = \begin{cases} 0 & \text{für } r<a_1\,,\\ -p_0=\dfrac{-P}{\pi(a^2-a_1^2)} & ,,\ a_1\le r\le a\end{cases}\end{aligned}\right\} \tag{74}$$

folgt. Multiplizieren wir diese Gleichung mit $J_0(\lambda_n r)\,r\,dr$ und integrieren von $r=0$ bis $r=a$, so bekommen wir wegen der Orthogonalität der Eigenfunktionen

$$\left.\begin{aligned}\frac{p_k}{2(1-2\nu)}(\lambda_k h e^{-\lambda_k h}-\operatorname{Sin}\lambda_k h)-\frac{q_k}{2(1-2\nu)}(\lambda_k h e^{\lambda_k h}-\operatorname{Sin}\lambda_k h)+c_k\operatorname{Cof}\lambda_k h=\\ =\frac{p_0 a_1 J_1(\lambda_k a_1)}{\lambda_k a^2 G J_0^2(\lambda_k a)}=\frac{P a_1 J_1(\lambda_k a_1)}{\pi a^2\lambda_k(a^2-a_1^2)G J_0^2(\lambda_k a)}=c_k^{(1)}.\end{aligned}\right\} \tag{75}$$

Der Übergang zur schneideförmigen Lagerung, d.h. $a_1\to a$, läßt sich mit Hilfe der *L'Hospital*schen Regel für die Koeffizienten vollziehen und man erhält für diesen Fall

$$c_k^{(1)}=-\frac{P}{2a^2\pi G J_0(\lambda_k a)}\,. \tag{76}$$

Daß der Grenzübergang $a_1\to a$ für $z<h$ mit dem der Partialsummen vertauschbar ist, folgt aus der gleichmäßigen Konvergenz der auftretenden Reihen bezüglich a_1. Dieses bedeutet, daß die für $a_1\neq a$ gefundenen Lösungen für $a_1\to a$ wenigstens im Inneren der Platte ($z<h$) gleichmäßig gegen Grenzwerte streben. Man ist versucht, diese als Lösung des Problems für schneideförmige Lagerung anzusprechen. Freilich treten für $z=h$ divergente Reihen auf, so daß der Anschluß an diesen Plattenrand ($z=h$) so hergestellt wird, daß man die durch (74) gegebene untere Belastung vor dem Grenzübergang für sich betrachtet und in diesem Bestandteil $a_1\to a$ vollzieht.

Aus der Randbedingung (70) ergibt sich

$$p_k(\lambda_k h e^{-\lambda_k h}+\operatorname{Sin}\lambda_k h)+q_k(\lambda_k h e^{\lambda_k h}+\operatorname{Sin}\lambda_k h)=2(1-2\nu)\,c_k\operatorname{Sin}\lambda_k h\,. \tag{77}$$

Aus (75) und (77) lassen sich p_k und q_k berechnen:

$$\left.\begin{aligned}p_k &= \frac{1-2\nu}{\operatorname{Sin}^2\lambda_k h-\lambda_k^2 h^2}\left[c_k\left(\lambda_k h+\frac{1}{2}\operatorname{Sin}2\lambda_k h+\operatorname{Sin}^2\lambda_k h\right)-c_k^{(1)}(\lambda_k h e^{\lambda_k h}+\operatorname{Sin}\lambda_k h)\right],\\ q_k &= \frac{1-2\nu}{\operatorname{Sin}^2\lambda_k h-\lambda_k^2 h^2}\left[c_k^{(1)}(\lambda_k h e^{-\lambda_k h}+\operatorname{Sin}\lambda_k h)-c_k\left(\lambda_k h+\frac{1}{2}\operatorname{Sin}2\lambda_k h-\operatorname{Sin}^2\lambda_k h\right)\right],\end{aligned}\right\} \tag{78}$$

womit das Problem bis auf die Erfüllung der Forderung (71) gelöst ist. Dieser noch nicht erfüllten Bedingung kann man auch hier — genau so wie bei der elastischen Lagerung — im Sinne des *Saint-Venant*schen Prinzips gerecht werden, worauf jedoch an dieser Stelle nicht näher eingegangen werden soll.

b) Die am Rande eingespannte dicke Kreisplatte. Auch in diesem Falle können die Verschiebungen (72) und (73) herangezogen werden und neben (66) erscheinen die Randbedingungen (67) bis (70) — letztere insbesondere für $a_1 \to a$ — sinnvoll, während (71) hinfällig wird. Da nach (73) die Radialverschiebung ϱ für $r = a$ verschwindet, erleiden die Punkte des Plattenmantels, mit Ausnahme von $z = h$, nur vertikale Verschiebungen und dies entspricht gerade dem Wesen der Einspannung. [Eine andere Bestätigung für diesen Sachverhalt folgt aus (72): Es ist $\left(\frac{\partial \zeta}{\partial r}\right)_{r=a} \equiv 0$]. Damit ist auch dieses Problem grundsätzlich erledigt, da nach Auflösung von (75) und (77) nach p_k und q_k vermöge (13) und (16) alle Koeffizienten in den Verschiebungsfunktionen bekannt sind.

8. Zusammenfassung und eine Schlußbemerkung. In einer vorangehenden Mitteilung[1] wurde das Problem der achsensymmet isch belasteten dicken Kreisplatte auf elastischer Unterlage untersucht und unter Vernachlässigung der zwischen Platte und Unterlage auftretenden Reibungskräfte die Lösung angegeben. Die vorliegende Mitteilung greift noch einmal dasselbe Problem auf unter Berücksichtigung der erwähnten Kräfte. Auch in diesem Falle führt das Randwertproblem auf ein — präziser gesagt zwei — Systeme von linearen Gleichungen mit unendlich vielen Unbekannten. Das unendliche Gleichungssystem ist das Charakterstische für den Spannungs- und Deformationszustand einer auf dem Halbraum aufliegenden dicken Kreisplatte, während z. B. bei fester Einspannung die Koeffizienten in den Verschiebungsfunktionen sich direkt berechnen lassen, worauf hier abschließend hingewiesen wurde.

Zum Abschluß noch eine Bemerkung: Den Randbedingungen (7), (8) und (9) liegen die Voraussetzungen zugrunde, daß zwischen Platte und Unterlage eine stetige Berührung besteht, was offenbar nur solange zutrifft, bis zwischen ihnen Druckkräfte auftreten; dies wird bei den üblichen Belastungsarten meistens der Fall sein. Bei gewissen — in der Praxis allerdings kaum auftretenden — Belastungen kann es vorkommen, daß in einem bestimmten, meist schmalen, am Rande gelegenen oder achsennahen Bereich neben den Druckkräften auch Zugspannungen auftreten, und das bedeutet in Wirklichkeit, daß die Platte sich von der Unterlage abhebt. Für die Praxis heißt ein solches Resultat, die Belastung so zu ändern, daß kein Zugbereich auftritt. Aus diesem Grunde hat es wenig praktisches Interesse, die einem solchen Fall entsprechenden wirklichen Spannungs- und Deformationsgleichungen zu ermitteln, was mit Hilfe einer „Iteration" prinzipiell möglich wäre.

(Eingegangen am 27. März 1951.)

Anschrift des Verfassers: Prof. Dr.-Ing. *István Szabó*, Berlin-Charlottenburg 2, Technische Universität.

Druckfehlerberichtigung zur ersten Mitteilung, Ingenieur-Archiv 19 (1951) S. 128:

Seite 129, Formel (11): $\frac{\tau}{r}$ statt $\frac{\tau}{\varrho}$.
Seite 130, Formel (21): füge rechts hinzu: $+A$.
Seite 131, Formel (31): in der zweiten Zeile $e^{\lambda z}$ statt $e^{-\lambda z}$.
Seite 132, Zeile 6 von unten: $\sum_{k=1}^{\infty}$ statt $\sum_{k=\nu}^{\infty}$.
Seite 134, Zeile 1 von oben: $\sigma_z(h, r)$ statt $\sigma(h, r)$.
Seite 134, Zeile 11 von oben, zweite Formel rechte Seite: $a\vartheta$ statt ϑ.
Seite 135, Formel (54): $3-2\nu$ statt $3-4\nu$.
Seite 136, Formel (57): $\overline{m}_R$ statt m_R.
Formel (59), (60) und (61): $\frac{\bar{\sigma}_r h \nu}{2G(1+\nu)}$ statt $\frac{\bar{\sigma}_r h}{2G(1-\nu)}$.
Seite 137, Formel (63): $(1-\nu) J_0(\lambda_n a)$ statt $(1-\nu J_0)(\lambda_n a)$.
Seite 138, Zeile 8 von obzn: $\sum_{\alpha,\beta=1}^{\infty}$ statt $\sum_{\alpha,\beta=1}$.
Seite 139, Zeile 3 von unten: füge den Faktor $e^{\lambda_n h}$ beim ersten Glied im Zähler hinzu.
Seite 142, Ziffer 12, zweite Zeile: Hookeschen statt Hockeschen.

[1] Siehe Fußnote auf S. 342.

Neue Konstruktion der Wirkungslinie des resultierenden Massenwiderstandes eines eben bewegten Getriebegliedes.

Von O. Tolle.

Ausgehend von der Möglichkeit, bei Ermittlung einer bestimmten Wirkungslinie die gesamte Massenwirkung eines eben bewegten Getriebegliedes durch eine Einzelkraft $\bar{P} = -m\bar{b}_S$ zu ersetzen, wobei m die Masse und $\bar{b}_S$ der Beschleunigungsvektor des Schwerpunktes S ist, wurden von *H. Alt*[1], *K. Federhofer*[2] und dem Verfasser[3] zeichnerische Verfahren angegeben, mit denen diese Wirkungslinie der resultierenden Massenkraft $\bar{P}$ ermittelt werden kann. Die nachstehende Konstruktion ist eine Anwendung des Beschleunigungsplanes von *M. Tolle*[4] unter gleichzeitiger Benutzung des Trägheitsmittelpunktes[3] (Schwingungsmittelpunkt). Die resultierende Massenkraft $\bar{P} = -m\bar{b}_S$ (Abb. 1), Ersatz für $-\varepsilon J_S$ und $-m\bar{b}_S$ im Schwerpunkt S angreifend, ist parallel $\bar{b}_S$, entgegengesetzt gerichtet und liegt von S aus im Abstand

$$e = \frac{-\varepsilon J_S}{-m b_S} = \frac{i_S^2}{s_K}\frac{b_{tSK}}{b_S} = \frac{t_K\, b_{tSK}}{b_S}.$$

Hierin bedeutet: $\bar{b}_{tSK}$ die relative Tangentialbeschleunigung S gegen K, ε die Winkelbeschleunigung, J_S das Massenträgheitsmoment bezogen auf Schwerachse $\perp KS$, $i_S = \sqrt{J_S/m}$ den Trägheitshalbmesser und $t_K = i_S^2/s_K$ den Abstand des auf K bezogenen Trägheitsmittelpunktes T_K von S aus.

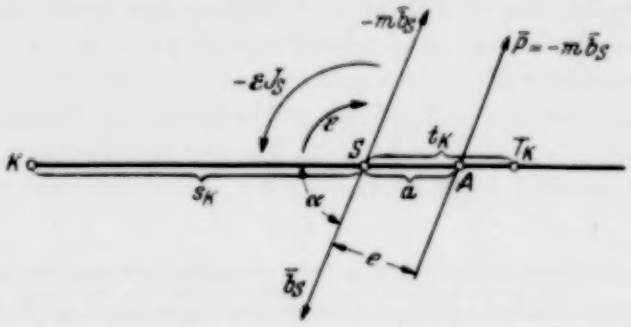


Abb. 1. Analytische Bestimmung der Wirkungslinie der resultierenden Massenkraft.

Die Wirkungslinie der resultierenden Massenkraft $\bar{P}$ kann andererseits auch durch einen auf der Verbindungslinie KS liegenden Punkt A festgelegt werden, dessen Entfernung von S aus gemessen gemäß Abb. 1 beträgt

$$SA = a = \frac{e}{\sin\alpha} = \frac{t_K}{b_S}\frac{b_{tSK}}{\sin\alpha}.$$

Wird für $b_{tSK}/\sin\alpha = x$ gesetzt, so ist $a = t_K x/b_S$. Diese Entfernung a kann nach Abb. 2 in einfacher Weise mit Hilfe des Beschleunigungsplanes nach *M. Tolle*[4] folgendermaßen gefunden werden.

Gegeben sind die Beschleunigungen $\bar{b}_K$ eines Punktes K und die Schwerpunktbeschleunigung $\bar{b}_S$, damit auch die Komponenten der relativen Beschleunigung $\bar{b}_{SK}$ von S gegen K, und zwar die relative Normalbeschleunigung $\bar{b}_{nSK}$ von S nach K gerichtet und die relative Tangentialbeschleunigung $\bar{b}_{tSK} \perp KS$. Die Anfangspunkte (S) und (K) der Beschleunigungen $\bar{b}_S$ und $\bar{b}_K$ liegen im Abstand $\bar{b}_{nSK}$ parallel KS, die Endpunkte $[S]$ und $[K]$ auf einer Senkrechten zu KS; Strecke $[K][S] = \bar{b}_{tSK}$. Man trägt im Beschleunigungsplan von (S) aus in Richtung (K) die Strecke $t_K = i_S^2/s_K$ auf, Endpunkt (T_K), und verbindet (T_K) mit $[S]$, zieht durch $[K]$ die Parallele zu $(K)(S)$, dann liegt auf dieser die gesuchte Strecke a zwischen $\bar{b}_S$ und der Verbindungslinie $(T_K)[S]$. Aus Abb. 2 folgt nämlich $x = b_{tSK}/\sin\alpha$ und aus der Ähnlichkeit der Dreiecke $a/x = t_K/b_S$ d.h. $a = t_K x/b_S$. Ohne Aufzeichnen des Beschleunigungsplanes nach Abb. 2 ergibt sich hieraus in

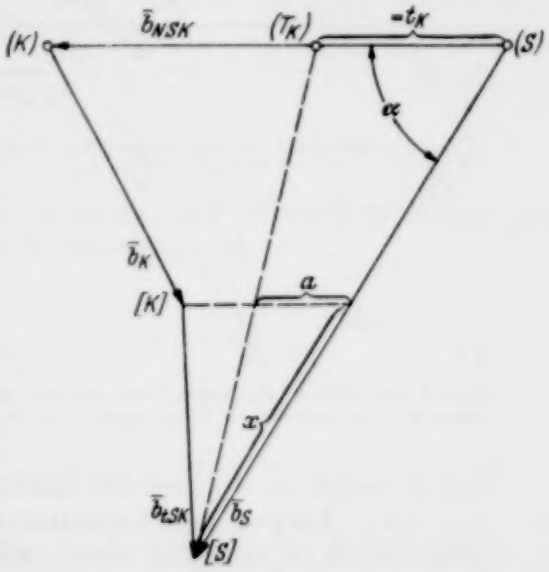


Abb. 2. Beschleunigungsplan nach *M. Tolle* mit Anwendung zur graphischen Lagenbestimmung der resultierenden Massenkraft.

[1] *H. Alt*, Z. angew. Math. Mech. 6 (1926), S. 58.
[2] *K. Federhofer*, ZVDI 74 (1930), S. 234.
[3] *O. Tolle*, Ing.-Arch. 1 (1930), S. 377, ZVDI 74 (1930), S. 1453, AWF-Getriebeblatt 637/638.
[4] *M. Tolle*, ZVDI 76 (1932), S. 799.

Abb. 3 folgende Konstruktion für die Lage der resultierenden Massenkraft $\bar{P}$ im Lageplan selbst.

Sind wiederum $\bar{b}_K$ und $\bar{b}_S$ gegeben und mit ihren Anfangspunkten K und S eingetragen, so wird von S aus die Strecke $t_K = i_S^2/s_K = S(T_K)$ nach K hin aufgetragen (und nicht in Richtung zum Trägheitsmittelpunkt T_K). Der Endpunkt (T_K) wird mit Endpunkt $[S]$ von $\bar{b}_S$ verbunden. Die Parallele zu KS durch den Endpunkt $[K]$ von $\bar{b}_K$ schneidet zwischen der Verbindungslinie $(\bar{T}_K)S$ und $\bar{b}_S$ die gesuchte Strecke a ab. In Abb. 3 ist dann die so gefundene Strecke $a = SA$ von S aus nach außen aufzutragen.

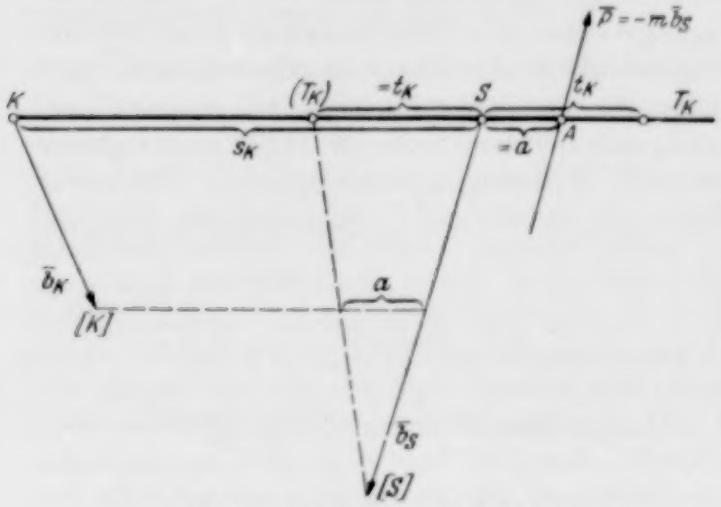


Abb. 3. Zeichnerische Ermittlung der Wirkungslinie des resultierenden Massenwiderstandes im Lageplan (ohne Aufzeichnen des Beschleunigungsplanes).

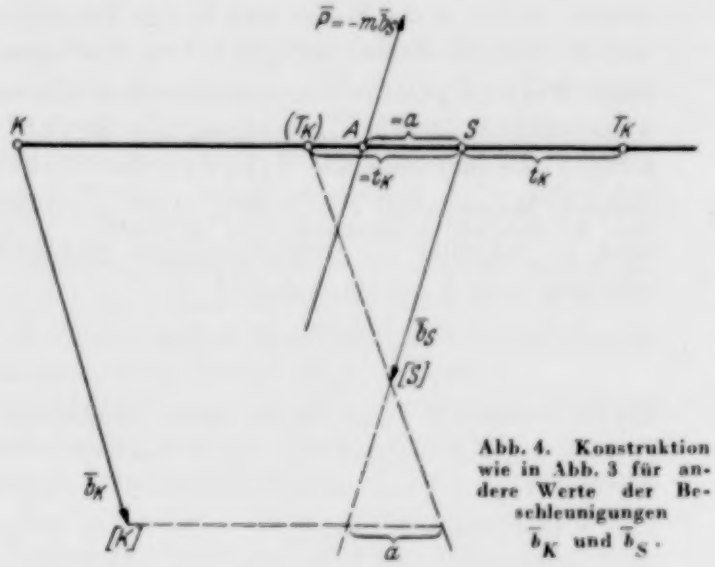


Abb. 4. Konstruktion wie in Abb. 3 für andere Werte der Beschleunigungen $\bar{b}_K$ und $\bar{b}_S$.

Dieselbe Konstruktion in Abb. 4 durchgeführt, in welcher andere Werte für $\bar{b}_K$ und $\bar{b}_S$ angenommen wurden, ergibt einen Wert a, der von S aus nach K hin aufzutragen ist. Es gilt folgende Vorzeichenregel für a:

1. Liegt die gefundene Strecke a von $[S]$ aus auf derselben Seite wie die Strecke $S(T_K)$, dann ist $a = SA$ von S aus auf der Verlängerung von KS aufzutragen (Abb. 3).

2. Liegen die gefundene Strecke a und Strecke $S(T_K)$ auf verschiedenen Seiten von $[S]$, so ist $a = SA$ von S aus nach K hin aufzutragen (Abb. 4).

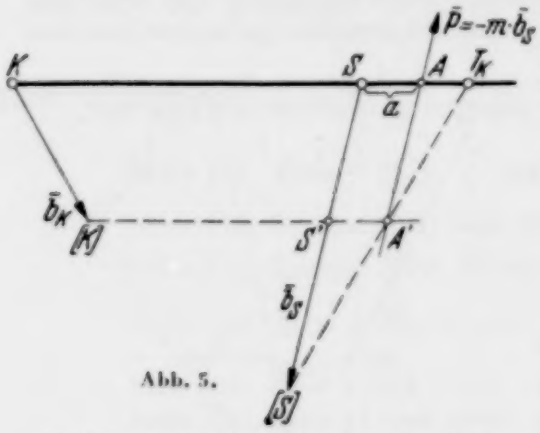


Abb. 5.

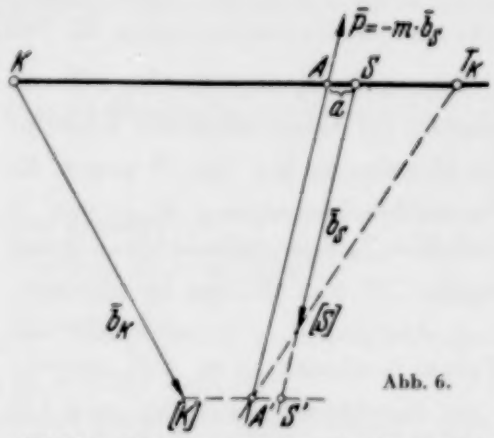


Abb. 6.

Abb. 5 und Abb. 6. Einfache Konstruktion der Wirkungslinie des resultierenden Massenwiderstandes, wobei sowohl die Übertragung der Strecke a als auch die Vorzeichenregel entbehrlich ist.

Abb. 5 und Abb. 6 zeigen eine weitere Vereinfachung der Konstruktion: Die Verbindungslinie des auf K bezogenen Trägheitsmittelpunktes T_K mit dem Endpunkt $[S]$ der Schwerpunktsbeschleunigung $\bar{b}_S$ (bzw. deren Verlängerung) schneidet sich mit der Parallelen zu KS, durch den Endpunkt $[K]$ der Beschleunigung $\bar{b}_K$ gezogen, im Punkt A', durch welchen die resultierende Massenkraft $\bar{P} = -m\bar{b}_S$ hindurchgeht (Strecke $S'A' = a = SA$). Liegen die Verhältnisse wie in Abb. 4, so zeigt Abb. 6, daß auch hier die letztgenannte Konstruktion durchführbar ist. Es braucht hierbei also weder die Strecke a übertragen zu werden, noch ist eine besondere Vorzeichenregel zu beachten.

Die vorstehend angegebene Konstruktion ist nicht nur von allen bisher bekannten die einfachste, sondern sie ist dann, wenn sonst schleifende Schnitte vorkommen, die genauere.

(Eingegangen am 27. März 1951.)

Baurat Dipl.-Ing. *O. Tolle*, Konstanz (Bodensee), Bahnhofplatz 10.

Massenreduktion und Massendruckdrehkraft für die Schubstange eines Kurbelgetriebes.

Von O. Tolle.

1. Einleitung. Das zur Schwungradberechnung allgemein benutzte Massenwuchtdiagramm[1] ist eine Zusammenstellung der Kurve der reduzierten Masse und der Arbeits- oder Wuchtkurve. Neben dieser Anwendung kann aus der reduzierten Masse auch die Massendruckdrehkraftkurve entwickelt werden. Soweit es sich um den Einfluß der Schubstange auf Massenreduktion und Drehkraft handelt, werden nachfolgend Gleichungen aufgestellt, welche den bisher üblichen Ersatz der Stangenmasse durch je eine im Kreuzkopfbolzen und eine im Kurbelzapfen angreifend zu denkende Masse noch verbessert, und aus denen die von der Stange herrührende Massendruckdrehkraft für jede Kurbelstellung mit größerer Genauigkeit als bisher bestimmt werden kann. Es wird ferner eine einfache Konstruktion angegeben, mit welcher sich die Drehkraft bestimmen läßt, wenn nach einem der bekannten zeichnerischen Verfahren[2] Größe und Wirkungslinie der resultierenden Massenkraft der Schubstange gefunden worden ist. Abschließend wird noch eine neue graphische Lösung angeführt, wie mit Hilfe des Massenwuchtdiagramms die Kurbelzapfengeschwindigkeit für die verschiedenen Getriebestellungen gefunden werden kann.

2. Reduzierte Masse der Schubstange. Unter der reduzierten Masse M_r eines Getriebegliedes bezogen auf einen beliebigen Punkt versteht man die Masse gleicher Wucht. Als Reduktionspunkt wählt man im Kurbelgetriebe fast immer den Kurbelzapfen K. Im Folgenden bedeuten (s. Abb. 1):

r den Kurbelhalbmesser, l die Schubstangenlänge, $\lambda = r/l$ das Stangenverhältnis, α den Kurbelwinkel, β den Erhebungswinkel der Stange, $\omega = d\alpha/dt = \alpha'$ die Winkelgeschwindigkeit der Kurbel, $\omega_2 = d\beta/dt = \beta'$ die augenblickliche Winkelgeschwindigkeit der Stange um den Kreuzkopfbolzen B, $v = r\omega$ die Geschwindigkeit des Kurbelzapfens K, $c = r\omega\left(\sin\alpha + \frac{1}{2}\lambda\sin 2\alpha\right)$ die Kreuzkopfgeschwindigkeit, s_2 den Abstand des Schwerpunktes S_2 der Stange vom Kreuzkopfbolzen B, $s_1 = l - s_2$ den Abstand des Schwerpunktes S_2 der Stange vom Kurbelzapfen K, M_2 die Schubstangenmasse, J_2 das Trägheitsmoment der Stange bezogen auf Kreuzkopfbolzenmittellinie, M_{r2} die auf Kurbelzapfen K reduzierte Masse der Schubstange.

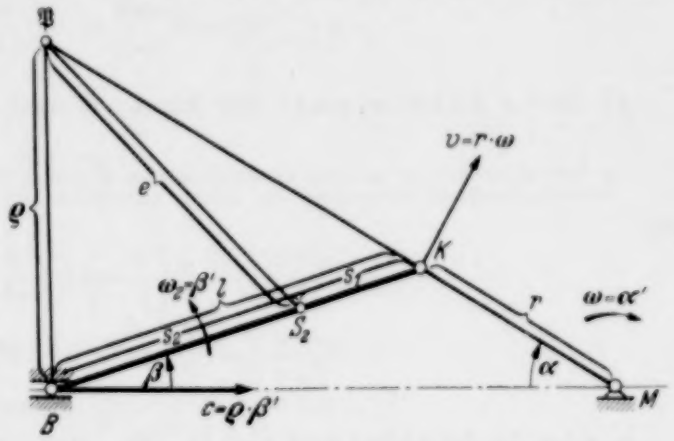


Abb. 1. Geschwindigkeitsverhältnisse im Kurbelgetriebe.

Für die Schubstange eines Kurbelgetriebes gilt[3]

$$M_{r2} = \left(M_2 - \frac{J_2}{l^2}\right)\sin^2\alpha\,(1 + 2\lambda\cos\alpha) + \frac{J_2}{l^2} \tag{1}$$

oder

$$M_{r2} = \frac{1}{2}\left(M_2 - \frac{J_2}{l^2}\right)[1 - \cos 2\alpha + \lambda\,(\cos\alpha - \cos 3\alpha)] + \frac{J_2}{l^2}\,. \tag{1a}$$

Hiernach setzt sich die gesamte auf den Kurbelzapfen reduzierte Masse M_{r2} der Schubstange aus zwei Teilen zusammen,

---

[1] *F. Wittenbauer*, Z. VDI (1905), S. 471, sowie Graphische Dynamik, S. 759. Berlin 1923; *M. Tolle*, Regelung der Kraftmaschinen S. 104, 3. Aufl. Berlin 1921; *C. B. Biezeno* und *R. Grammel*, Technische Dynamik S. 935. Berlin 1939.

[2] *H. Alt*, Z. angew. Math. Mech. 6 (1926), S. 58; *K. Federhofer*, Z. VDI 74 (1930), S. 234; *O. Tolle*, Ing.-Arch. 1 (1930), S. 377; Ebenda XIX (1951), S. 355; Z. VDI, 74 (1930), S. 1453, AWF-Getriebeblatt 637/638.

[3] *M. Tolle*, Regelung der Kraftmaschinen S. 107/119 Gl. (34), Gl. (34a) u. Gl. (41).

1. aus dem konstanten Wert $M'_{r2}=\frac{J_2}{l^2}$ im Kurbelzapfen K und

2. aus dem veränderlichen Wert

$$M''_{r2}=\left(M_2-\frac{J_2}{l^2}\right)\sin^2\alpha\,(1+2\,\lambda\cos\alpha)=\frac{1}{2}\left(M_2-\frac{J_2}{l^2}\right)[1-\cos 2\,\alpha+\lambda\,(\cos\alpha-\cos 3\,\alpha)],$$

im Kreuzkopfbolzen B zu denken. Vorstehende Gleichungen sind unter Fortlassung der Glieder mit λ^2 und mit Hilfe von Ersatzmassen aufgestellt worden. Es folgt nun eine Ableitung für die reduzierte Masse einer Schubstange ohne Massenersatz. Nach Abb. 1 ist die Wucht E_2 der Schubstange[1]

$$E_2=\frac{M_2\,c^2}{2}+\frac{J_2\omega_2^2}{2}-M_2\,c\,\omega_2 s_2\sin\beta$$

$$=\frac{M_2 c^2}{2}+\frac{J_2(\beta')^2}{2}-M_2\,c\,\beta'\,s_2\sin\beta\,.$$

Mit Kurbelzapfenmittelpunkt K als Reduktionspunkt, dessen Geschwindigkeit v ist, wird

$$E_2=\frac{M_{r2}\,v^2}{2}$$

und somit

$$M_{r2}=\frac{2\,E_2}{v^2}\,.$$

Es ist $\alpha'=\frac{d\alpha}{dt}=\omega=\frac{v}{r}$ und $\beta'=\frac{d\beta}{dt}=\omega_2$, ferner $\sin\beta=\lambda\sin\alpha$, somit

$$\frac{d\sin\beta}{dt}=\lambda\frac{d\sin\alpha}{dt}=\lambda\frac{d\sin\alpha}{d\alpha}\frac{d\alpha}{dt}=\lambda\,\omega\cos\alpha=\frac{d\sin\beta}{d\beta}\frac{d\beta}{dt}=\beta'\cos\beta$$

und damit

$$\beta'=\lambda\frac{\cos\alpha}{\cos\beta}\,\omega=\frac{\cos\alpha}{l\cos\beta}\,v=\frac{v}{l}\frac{\cos\alpha}{\cos\beta}\,.$$

a) Erste Annäherung: Für kleine Winkel β kann $\cos\beta=1$ gesetzt werden; dann wird

$$\beta'=\frac{v}{l}\cos\alpha$$

und

$$M_{r2}=M_2\left(\frac{c}{v}\right)^2+J_2\left(\frac{v}{l}\cos\alpha\right)^2\frac{1}{v^2}-2M_2 c\left(\frac{v}{l}\cos\alpha\right)s_2\lambda\frac{1}{v^2}\sin\alpha$$

$$=M_2\left(\frac{c}{v}\right)^2+\frac{J_2}{l^2}\cos^2\alpha-2M_2\frac{c}{v}\frac{s_2}{l}\lambda\sin\alpha\cos\alpha\,.$$

b) Zweite Annäherung $\lambda^2=0$. Hier ist $c=v\left(\sin\alpha+\frac{\lambda}{2}\sin 2\alpha\right)=v\sin\alpha\,(1+\lambda\cos\alpha)$,

$$\frac{c}{v}=\sin\alpha(1+\lambda\cos\alpha)\quad\text{und}\quad\left(\frac{c}{v}\right)^2=\sin^2\alpha\,(1+2\,\lambda\cos\alpha);$$

folglich wird

$$M_{r2}=M_2\sin^2\alpha+2\,\lambda\,M_2\sin^2\alpha\cos\alpha+\frac{J_2}{l^2}\cos^2\alpha-2\,\lambda\,M_2\frac{s_2}{l}\sin^2\alpha\cos\alpha\,.$$

Mit

$$\frac{l-s_2}{l}=\frac{s_1}{l}$$

kommt

$$M_{r2}=M_2\sin^2\alpha+2\,\lambda\,M_2\frac{s_1}{l}\sin^2\alpha\cos\alpha+\frac{J_2}{l^2}\cos^2\alpha\,.$$

---

[1] Nachweis: Es erfolgt Drehung der Schubstange um Momentanpol $\mathfrak{P}$ mit $\omega_2=\frac{d\beta}{dt}=\beta'$, folglich ist die Wucht $E_2=\frac{J_{\mathfrak{P}}\,(\beta')^2}{2}$, worin $J_{\mathfrak{P}}=J_{s_2}+M_2 e^2=J_2+M_2(e^2-s_2^2)$.

Nach dem Cosinussatz ist $e^2-s_2^2=\varrho^2-2\,\varrho s_2\sin\beta$ und somit $J_{\mathfrak{P}}=J_2+M_2(\varrho^2-2\,\varrho s_2\sin\beta)$, und mit der Kreuzkopfgeschwindigkeit $c=\varrho\beta'=\varrho\omega_2$ wird $E_2=\frac{J_2\omega_2^2}{2}+\frac{M_2 c^2}{2}-M_2\,c\,\omega_2 s_2\sin\beta$.

Ergänzt man die rechte Seite durch

$$+\frac{J_2}{l^2}\sin^2\alpha-\frac{J_2}{l^2}\sin^2\alpha\,,$$

so wird

$$M_{r2}=\left(M_2-\frac{J_2}{l^2}\right)\sin^2\alpha+2\lambda\frac{s_1}{l}M_2\sin^2\alpha\cos\alpha+\frac{J_2}{l^2}$$

oder

$$M_{r2}=\left(M_2-\frac{J_2}{l^2}\right)\sin^2\alpha\left(1+2\lambda\frac{s_1}{l}\frac{M_2}{M_2-\frac{J_2}{l^2}}\cos\alpha\right)+\frac{J_2}{l^2}\,. \tag{2}$$

Hier ist $\frac{J_2}{l^2}=M'_{r2}$ der im Kurbelzapfen zu denkende Teil der reduzierten Schubstangenmasse, während der erste Summand des Ausdruckes für M_{r2} der auf den Kreuzkopf entfallende Anteil M''_{r2} ist. Dieser kann nach (2) rechnerisch oder nach der in *M. Tolle* „Regelung der Kraftmaschinen" in Abb. 93 Seite 108 für hin- und hergehende Teile angegebenen Konstruktion auch für die reduzierte Masse der Schubstange, wie folgt, zeichnerisch ermittelt werden (Abb. 2).

Man zeichne mit $\varrho=2\lambda\frac{s_1}{l}M_2$ als Halbmesser einen Kreis, von dessen Mittelpunkt M die Kurbelstellungen ausgehen und errichte auf $0-0$ im Abstand $M_2-\frac{J_2}{l^2}$ von M aus die Senkrechte. Abstand $AC=Z$, von M aus auf der Kurbelstellung α aufgetragen, liefert die Strecke $DE=Z'$, welche von M aus aufgetragen mit Abstand $FG=Z''$ die gesuchte reduzierte Masse M''_{r2} ergibt, soweit diese im Kreuzkopfzapfen zu denken ist. Denn nach Abb. 2 ist

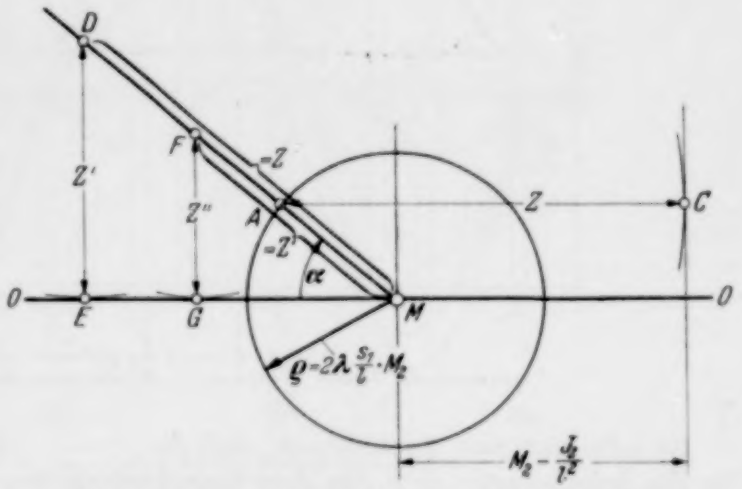


Abb. 2. Zeichnerische Ermittlung des auf den Kreuzkopf entfallenden Anteils der reduzierten Schubstangenmasse.

$$Z=\left(M_2-\frac{J_2}{l^2}\right)+2\lambda\frac{s_1}{l}M_2\cos\alpha\,,$$

$$Z'=Z\sin\alpha\,,$$

$$Z''=Z'\sin\alpha=Z\sin^2\alpha=\left(M_2-\frac{J_2}{l^2}\right)\sin^2\alpha\left[1+2\lambda\frac{s_1}{l}\frac{M_2}{M_2-\frac{J_2}{l^2}}\cos\alpha\right]=M''_{r2}\,.$$

Für die prismatische Stange mit $\frac{s_1}{l}=\frac{1}{2}$ und $\frac{J_2}{l^2}=\frac{1}{3}M_2$ gilt nach (2)

$$\text{für } \lambda=\lambda\text{:}\quad M_{r2}=\frac{2}{3}M_2\sin^2\alpha\left(1+\frac{3}{2}\lambda\cos\alpha\right)+\frac{M_2}{3}\,,$$

$$\text{für } \lambda=0\text{:}\quad M_{r2}=\frac{2}{3}M_2\sin^2\alpha+\frac{M_2}{3}\,.$$

Mit einem Stangenverhältnisse $\lambda=\frac{1}{5}$ werden die für die graphische Lösung erforderlichen Werte

a) bei prismatischer Stange $M_2-\frac{J_2}{l^2}=\frac{2}{3}M_2$ und $\varrho=\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{2}M_2=0{,}2\,M_2$,

b) bei einer Schubstange mit $\frac{s_1}{l}=0{,}35$ und $\frac{J_2}{l^2}=0{,}60\,M_2$

dagegen

$$M_2-\frac{J_2}{l^2}=0{,}4\,M_2\quad\text{und}\quad\varrho=\frac{2}{5}0{,}35\,M_2=0{,}14\,M_2.$$

Abb. 3 zeigt die Kurven für die reduzierte Schubstangenmasse M_{r2} und zwar Kurve *a* für eine prismatische Stange, Kurve *b* für eine Schubstange mit $\frac{s_1}{l}=0{,}35$ und $M_2-\frac{J_2}{l^2}=0{,}4\,M_2$. Der im

Kurbelzapfen zu denkende Teil der reduzierten Masse ist im ersten Fall $M'_{r2} = \frac{1}{3} M_2$, im zweiten Fall $M'_{r2} = 0{,}6\, M_2$.

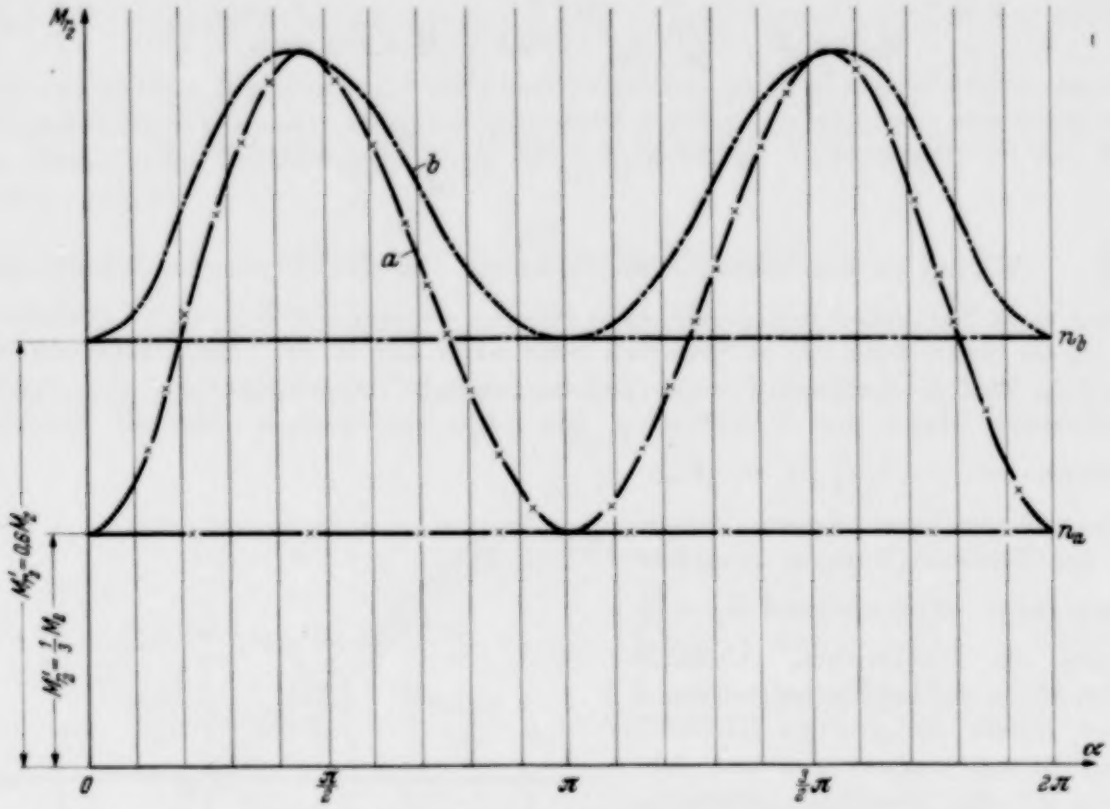


Abb. 3. Kurven der reduzierten Massen für $\lambda = 1/5$.
1. prismatische Stange Kurve a; 2. Schubstange mit $J_2/l^2 = 0{,}6\, M_2$ und $s_1/l = 0{,}35$ Kurve b.

Es läßt sich nun nachweisen, daß die durch (2) ausgedrückte Kurve der reduzierten Masse für die Schubstange sich aus drei Sinuskurven mit den Frequenzen ω, 2ω und 3ω zusammensetzt, wie dies auch bei der Kurve der reduzierten Masse nach (1a) der Fall ist. Setzt man

$$\sin^2\alpha = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\alpha) \quad \text{und} \quad \sin^2\alpha\cos\alpha = \frac{1}{2}\sin 2\alpha \sin\alpha = \frac{1}{4}(\cos\alpha - \cos 3\alpha)$$

so ergibt sich aus (2)

$$M_{r2} = \frac{1}{2}\left[\left(M_2 - \frac{J_2}{l^2}\right)(1 - \cos 2\alpha) + \lambda \frac{s_1}{l} M_2 (\cos\alpha - \cos 3\alpha)\right] + \frac{J_2}{l^2}$$

$$= \frac{1}{2}\left[\left(M_2 - \frac{J_2}{l^2}\right) - \left(M_2 - \frac{J_2}{l^2}\right)\cos 2\alpha + \lambda \frac{s_1}{l} M_2 (\cos\alpha - \cos 3\alpha)\right] + \frac{J_2}{l^2}. \qquad (3)$$

Nimmt man den letzten Ausdruck der Gleichung (3) in die Klammer hinein, so kann für die reduzierte Masse der Schubstange auch geschrieben werden

$$M_{r2} = \frac{1}{2}\left[\left(M_2 + \frac{J_2}{l^2}\right) - \left(M_2 - \frac{J_2}{l^2}\right)\cos 2\alpha + \lambda \frac{s_1}{l} M_2 (\cos\alpha - \cos 3\alpha)\right]. \qquad (4)$$

3. Massendruckdrehkraft T_2 von der Schubstangenmasse herrührend. Die Wucht der Schubstange ist

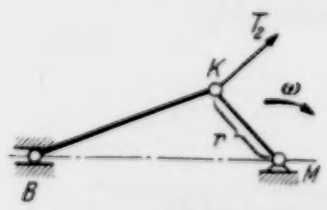


Abb. 4. Massendruckdrehkraft infolge Schubstangenmasse.

$$E_2 = \frac{1}{2} M_{r2} v^2 = \frac{1}{2} M_{r2} (r\omega)^2$$

und nach dem Wuchtsatz gilt (Abb. 4)

$$\frac{dE_2}{dt} = \frac{d\mathfrak{A}}{dt} = T_2 (r\omega);$$

folglich ist

$$T_2 = \frac{1}{r\omega}\frac{dE_2}{dt} = \frac{1}{r\omega}\frac{dE_2}{d\alpha}\frac{d\alpha}{dt} = \frac{1}{r}\frac{dE_2}{d\alpha} = \frac{1}{r}\frac{r^2\omega^2}{2}\frac{dM_{r2}}{d\alpha} = \frac{r\omega^2}{2}\frac{dM_{r2}}{d\alpha}. \qquad (5)$$

Differentiert man M_{r2} in (3) nach α, so erhält man

$$\frac{dM_{r2}}{d\alpha} = \frac{1}{2}\left[2\left(M_2 - \frac{J_2}{l^2}\right)\sin 2\alpha - \lambda\frac{s_1}{l}M_2(\sin\alpha - 3\sin 3\alpha)\right]$$

und damit

$$T_2 = \frac{r\omega^2}{2}\left[\left(M_2 - \frac{J_2}{l^2}\right)\sin 2\alpha - \frac{\lambda}{2}\frac{s_1}{l}M_2(\sin\alpha - 3\sin 3\alpha)\right]. \qquad (6)$$

Diese Gleichung für T_2 enthält nur reine Sinusglieder mit den Frequenzen ω, 2ω und 3ω. Man bestimmt die Massendruckdrehkraftkurve daher am einfachsten graphisch wie bei der Zusammensetzung harmonischer Schwingungen mit verschiedenen Frequenzen. Abb. 5 zeigt für eine pris-

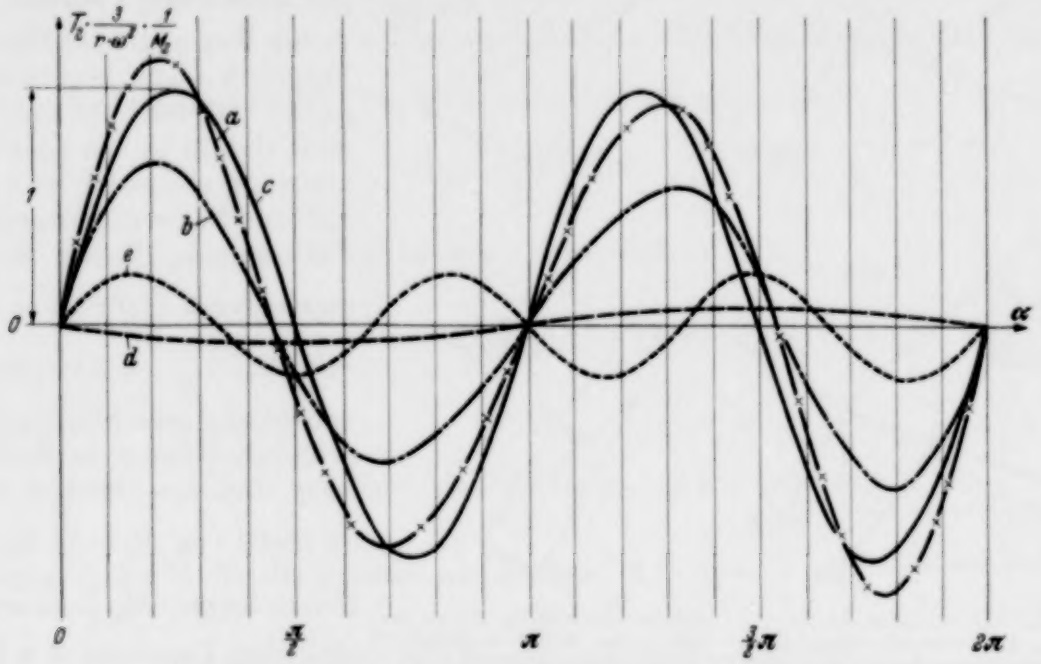


Abb. 5. Massendruckdrehkraftkurven für 1. prismatische Stange Kurve a;
2. Schubstange mit $J_2/l^2 = 0{,}6\,M_2$ und $s_1/l = 0{,}35$ Kurve b.

matische Stange mit $\frac{J_2}{l^2} = \frac{1}{3}M_2$ und $\frac{s_1}{l} = \frac{1}{2}$ bei $\lambda = \frac{1}{5}$ die Massendruckdrehkraftkurve a, die durch algebraische Addition der Kurven c, d und e gefunden wurde. Für die prismatische Stange gilt nach (6)

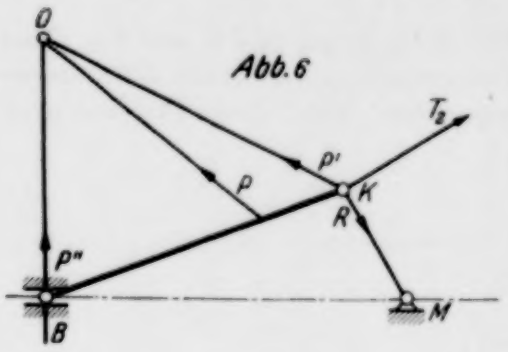
$$T_2 = \frac{r\omega^2}{2}\left[\frac{2}{3}M_2\sin 2\alpha - \frac{1}{20}M_2(\sin\alpha - 3\sin 3\alpha)\right]$$
$$= \frac{r\omega^2}{3}M_2\left(\sin 2\alpha - \frac{3}{40}\sin\alpha + \frac{9}{40}\sin 3\alpha\right).$$

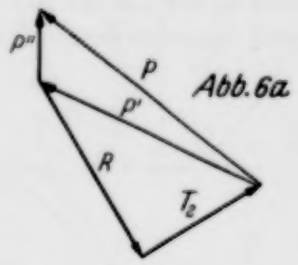
In Abb. 5 ist $\sin 2\alpha$ durch Kurve c, $\frac{3}{40}\sin\alpha$ durch Kurve d und $\frac{9}{40}\sin 3\alpha$ durch Kurve e dargestellt. Die Kurve b ist die Massendruckdrehkraftkurve für eine Schubstange mit $\frac{J_2}{l^2} = 0{,}6\,M_2$ und $\frac{s_1}{l} = 0{,}35$ bei $\lambda = \frac{1}{5}$ und in gleicher Weise gefunden wie für die prismatische Stange aus

$$T_2 = \frac{r\omega^2}{3}M_2(0{,}6\sin 2\alpha - 0{,}0525\sin\alpha + 0{,}1675\sin 3\alpha).$$

Ist (Abb. 6) die resultierende Massenkraft $P = -M_2 b_s$ der Schubstange (wo b_s die Schwerpunktsbeschleunigung der Schubstange) nach Größe und Wirkungslinie nach einem der zeichnerischen Verfahren (Fußnote 2 auf S. 357) ermittelt worden, so kann ihr Einfluß auf die Drehkraft T_2 in einfacher Weise wie folgt bestimmt werden. Man zerlegt P in zwei Komponenten, von denen die eine P'' im Kreuzkopfzapfen senkrecht zur Gleitbahn angreift, mithin keine Arbeit leistet, also auch keine Drehkraft liefert, während die andere P' im Kurbelzapfen angreift (also durch den Schnittpunkt 0 von P und P'' hindurchgeht). Am Kurbelzapfen sind dann im Gleichgewicht: P', T_2 und die in die Richtung der Kurbel fallende Kraft R (s. Kräfteplan Abb. 6a).

Ist, wie in Abb. 7, der Schnittpunkt der Normalen zur Gleitbahn mit der Wirkungslinie von P nicht zugänglich, so findet man die Richtung von P' nach dem Strahlensatz, indem man mit K als der einen Ecke eines beliebigen Dreiecks beginnend, die anderen Ecken auf die Wirkungslinien von P und P'' legt. Ein hierzu ähnliches Dreieck (durch Parallelenziehen) ergibt einen weiteren Punkt der Wirkungslinie P' und damit auch deren Größe nach Kräfteplan Abb. 7a. Für den Kurbelzapfen findet man dann wie oben aus P' die Drehkraft T_2 und R.





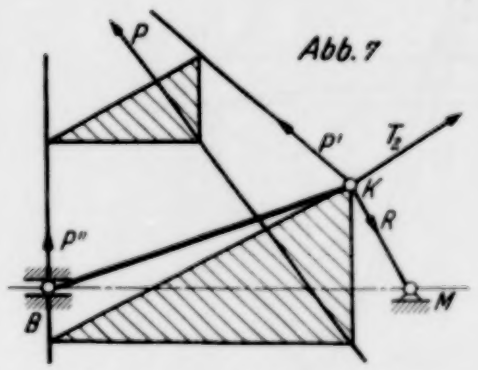


Abb. 6 und Abb. 7. Zeichnerische Bestimmung der Drehkraft infolge der Schubstangenmasse.

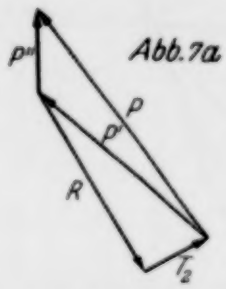


Abb. 6a und Abb. 7a. Die zu den Abb. 6 und Abb. 7 zugehörigen Kraftecke.

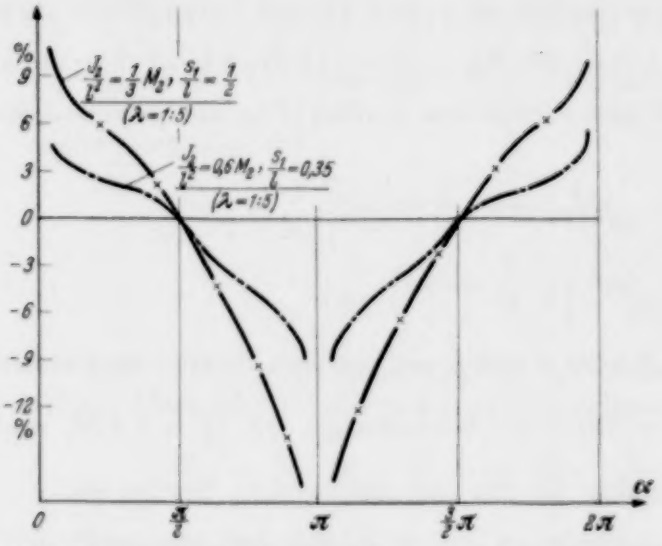


Abb. 8. Prozentuale Abweichungen der auf den Kreuzkopf entfallenden Anteile der reduzierten Schubstangenmasse nach (1) und (2) in Abhängigkeit vom Kurbelwinkel.

4. Vergleich der neuaufgestellten Gleichungen für die reduzierte Masse und für die Massendruckdrehkraft einer Schubstange mit den bisher gebräuchlichen Formeln.

a) Reduzierte Masse. Beim Vergleich des in (3) gefundenen Wertes für M_{r2} mit dem nach (1a) findet man, daß in beiden Gleichungen die konstanten Glieder und diejenigen mit $\cos 2\alpha$ völlig übereinstimmen. Der übliche Ersatz der Stangenmasse durch $\frac{J_2}{l^2}$ direkt an der Kurbel und $M_2 - \frac{J_2}{l^2}$ am Kreuzkopf ist also vollständig gerechtfertigt, soweit die größeren Glieder in Betracht kommen. Bei den Gliedern mit λ wäre an Stelle von $M_2 - \frac{J_2}{l^2}$ der Gleichung (1a) richtiger $M_2 \frac{s_1}{l}$ zu setzen. Prüft man den Unterschied z. B. für eine Stange mit $\frac{J_2}{l^2} = 0{,}6\, M_2$ und $\frac{s_1}{l} = 0{,}35$ bei $\lambda = \frac{1}{5}$, so wäre an Stelle von

$$M_2 - 0{,}6\, M_2 = 0{,}4\ M_2$$

genauer $0{,}35\ M_2$ zu setzen; dieser Unterschied von $0{,}05\, M_2$ ist noch mit λ zu multiplizieren, so daß ein Fehler von

$$\lambda \left(M_2 - \frac{J_2}{l^2} - M_2 \frac{s_1}{l} \right) = \frac{1}{5}\, 0{,}05\, M_2 = 0{,}01\, M_2,$$

und gegen $0{,}4\, M_2$ der Glieder ohne λ ein solcher von $0{,}01/0{,}40 = 2{,}5\%$ besteht. Bei prismatischer Stange mit $\frac{J_2}{l^2} = \frac{1}{3}\, M_2$ und $\frac{s_1}{l} = \frac{1}{2}$ sowie $\lambda = \frac{1}{5}$, d. h. $M_2 - \frac{J_2}{l^2} = \frac{2}{3}\, M_2$ und $\frac{s_1}{l} \cdot M_2 = \frac{1}{2}\, M_2$ ist der Fehler $\frac{1}{5} \cdot \frac{1}{6}\, M_2 = \frac{1}{30}\, M_2$ und damit gegen $\frac{2}{3}\, M_2$ der Glieder ohne λ dieser $\frac{1}{30} \Big/ \frac{2}{3} = 5\%$, d. h. doppelt so groß wie oben.

Bestimmt man aus den Gleichungen (1) und (2) den auf den Kreuzkopfzapfen entfallenden Teil M''_{r2} in beiden Fällen, so ergeben sich für die Schubstange je nach der Kurbelstellung verschiedene Werte. So ist z. B. für eine prismatische Stange mit

$$\frac{J_2}{l^2} = \frac{1}{3} M_2, \quad \frac{s_1}{l} = \frac{1}{2}, \quad \lambda = \frac{1}{5} \text{ und } \alpha = 30^\circ$$

nach (1) $M''_{r2} = 0{,}2243\, M_2$, nach (2) $M''_{r2} = 0{,}2099\, M_2$. Das Verhältnis $0{,}2243\, M_2/0{,}2099\, M_2 = 1{,}0695$ besagt, daß im ersten Fall M''_{r2} um 6,95% größer ist.

Abb. 8 zeigt die prozentualen Abweichungen der Werte M''_{r2} in den verschiedenen Kurbelstellungen für eine prismatische Stange und eine Schubstange mit $\frac{s_1}{l} = 0{,}35$ und $\frac{J_2}{l^2} = 0{,}6\, M_2$ bei $\lambda = \frac{1}{5}$. In den Totlagen sind die Abweichungen am größten, für $\alpha = \frac{\pi}{2}$ und $\alpha = \frac{3}{2}\pi$ liefern (1) und (2) dieselben Werte für M''_{r2}.

Für unendliche Stangenlänge ($\lambda = 0$) stimmt der gebräuchliche Ersatz, nämlich bei prismatischer Stange $\frac{2}{3} M_2$, bei beliebiger Schubstangenform $M_2 - \frac{J_2}{l^2}$ im Kreuzkopfzapfen in allen Kurbelstellungen mit den Werten der neuen Gleichungen genau überein.

b) Massendruckdrehkraft. Nach Gleichung (5) gilt allgemein

$$T_2 = \frac{r\,\omega^2}{2}\,\frac{d\,M_{r2}}{d\alpha}.$$

Differentiert man M_{r2} in Gleichung (1a) nach α, so wird

$$\frac{dM_{r2}}{d\alpha} = \frac{1}{2}\left(M_2 - \frac{J^2}{l^2}\right)[2\sin 2\alpha - \lambda\,(\sin\alpha - 3\sin 3\alpha)]$$

und somit

$$T_2 = \frac{r\,\omega^2}{4}\left(M_2 - \frac{J_2}{l^2}\right)[2\sin 2\alpha - \lambda\,(\sin\alpha - 3\sin 3\alpha)].$$

Hieraus ergibt sich z. B. für die prismatische Stange $\left(M_2 - \frac{J_2}{l^2} = \frac{2}{3}\, M_2\right)$

$$T_2 = \frac{r\,\omega^2}{4}\,\frac{2}{3}\, M_2[2\sin 2\alpha - \lambda\,(\sin\alpha - 3\sin 3\alpha)]$$

$$= \frac{r\,\omega^2}{24}\, M_2[8\sin 2\alpha - 4\lambda\,(\sin\alpha - 3\sin 3\alpha)].$$

Der entsprechende Wert für T_2 nach Gleichung (6) lautet

$$T_2 = \frac{r\,\omega^2}{2}\left[\frac{2}{3}\, M_2 \sin 2\alpha - \frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\, M_2\,(\sin\alpha - 3\sin 3\alpha)\right]$$

$$= \frac{r\,\omega^2}{24}\, M_2[8\sin 2\alpha - 3\lambda(\sin\alpha - 3\sin 3\alpha)];$$

der Unterschied liegt also auch hier nur bei dem Glied mit λ.

5. Konstruktion der Kurbelzapfengeschwindigkeit v mit Hilfe des Massenwuchtdiagramms. Eine einfache graphische Lösung ist bereits in „Regelung der Kraftmaschinen" von *M. Tolle*, 3. Auflage Seite 121 u. f. in den Abb. 101 bis 103 angegeben. Wie dort ausführlich beschrieben, gilt für das Massenwuchtdiagramm, in welchem die auf den Kurbelzapfen reduzierten Gewichte $G_r = M_r\, g$ als Abszissen, die zugehörige Wucht $E = \frac{1}{2}\, M_r\, v^2$ als Ordinaten aufgetragen sind, folgendes: Zieht man in Abb. 9 von dem Koordinatenanfangspunkt O aus Strahlen nach der Massenwuchtkurve, so gilt für den Winkel φ eines solchen Strahles

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{E}{G_r} = \frac{v^2}{2g} = \frac{r^2\,\omega^2}{2g} = \frac{1}{2g}\left(\frac{r\,\pi}{30}\right)^2 n^2,$$

d. h., die augenblickliche Kurbelzapfengeschwindigkeit v (bzw. ω und n) ist dem Wert $\sqrt{\operatorname{tg}\varphi}$ proportional. Für ein rechtwinkliges Achsenkreuz (x, y) mit $x = v$ und $y = \operatorname{tg}\varphi = v^2/2g = x^2/2g$ und Koordinatenanfangspunkt O' (Abb. 9a) ergibt sich eine Parabel, deren Ordinaten die Geschwindigkeitshöhen $v^2/2g$ und deren Abszissen die Kurbelzapfengeschwindigkeiten v sind. Bei Berücksichtigung der Zeichenmaßstäbe für Wucht E mit 1 cm $\triangleq \varepsilon$ mkg und reduziertes

Gewicht G, 1 cm $\triangleq \gamma$ kg wird

$$v = \sqrt{2g\frac{\varepsilon}{\gamma}}\sqrt{\operatorname{tg}\varphi} \quad \text{bzw.} \quad \frac{\gamma}{\varepsilon}\frac{v^2}{2g} = \operatorname{tg}\varphi = y,$$

und mit $v = x$ entsteht wiederum eine Parabel (Abb. 9).

Sollen für die verschiedenen Getriebestellungen die Geschwindigkeiten v (ω oder n) aufgesucht werden, so zeichnet man diese Parabel am einfachsten und genauesten nach der bekannten Hüllkonstruktion, indem man zunächst für einen beliebigen Winkel φ die Kurbelzapfengeschwindigkeit $v = \sqrt{(\varepsilon/\gamma)\,2g}\cdot\sqrt{\operatorname{tg}\varphi}$ ausrechnet. Legt man eine beliebige Ordinate $y = \overline{O'A}$ und trägt in einem beliebigen Maßstab 1 cm $\triangleq \delta$ m/s von A aus die errechnete Kurbelzapfengeschwindigkeit v als Abszisse $\overline{AB}$ auf, dann sind die für die Hüllkonstruktion der Parabel erforderlichen Stücke bekannt: der Scheitel O' und die Scheiteltangente x, ferner für die gewählte Ordinate $y = \operatorname{tg}\varphi = (\gamma/\varepsilon)\,(v^2/2g) = \overline{O'A}$, die zugehörige Abszisse $v = \overline{AB}$, d. h. ein zweiter Parabelpunkt B. Der Schnittpunkt T der Parabeltangente in B mit der Scheiteltangente x liegt in 1/2 $\overline{AB}$ von O' aus.

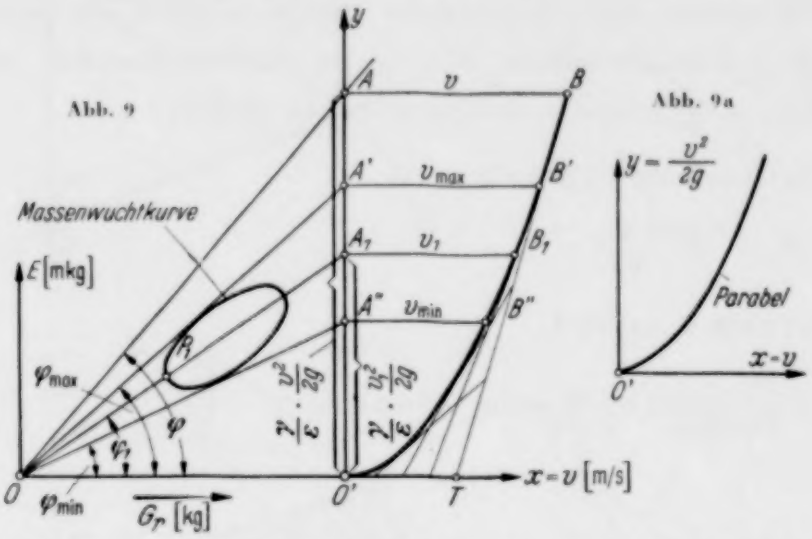


Abb. 9 und 9a. Konstruktion der Kurbelzapfengeschwindigkeit mit Hilfe des Massenwuchtdiagramms.

Für jeden weiteren Punkt der Massenwuchtkurve, z. B. P_1, findet man die zugehörige Geschwindigkeit v_1, indem man durch P_1 den Strahl von O aus mit der Ordinate y in A_1 zum Schnitt bringt. $\overline{A_1 B_1}$ ist dann die gesuchte Geschwindigkeit v_1. In Abb. 9 sind auch die Größen von v_{max} und v_{min} eingezeichnet, die bekannterweise aus den Fahrstrahlen gefunden werden, welche oben und unten tangential an die Massenwuchtkurve gelegt sind. Werden an Stelle der Geschwindigkeiten v als Abszissen in beliebigem Maßstab die Winkelgeschwindigkeiten ω, bzw. minutlichen Drehzahlen n aufgetragen, so können gleichfalls mit der Parabel für jede Getriebsstellung die zugehörigen Werte ω_1 bzw. n_1 abgelesen werden.

Die vorstehend angegebene Konstruktion kann auch für die u m g e k e h r t e Aufgabe benutzt werden, d. h. für gegebene Werte v (ω oder n) die zugehörigen Fahrstrahlwinkel φ zu bestimmen (Schwungradberechnung).

(Eingegangen am 27. März 1951.)

Anschrift des Verfassers: *O. Tolle*, Konstanz (Bodensee), Bahnhofplatz 10.

Die Berechnung der Profilform bei vorgegebener Geschwindigkeitsverteilung.

Von E. Truckenbrodt.

1. Einleitung. Das Problem, für eine vorgegebene Profilform die Geschwindigkeitsverteilung an der Profiloberfläche zu berechnen, ist durch die von *F. Riegels*[1] weiterentwickelte Singularitätenmethode auf sehr einfache Weise gelöst. Nach diesem Verfahren läßt sich die Geschwindigkeitsverteilung dadurch berechnen, daß man an bestimmten Stellen der Profilsehne die Profilordinaten mit für diese Stellen charakteristischen Konstanten multipliziert und dann über diese Produkte summiert. Auch die aus der Geschwindigkeitsverteilung sich ergebende Gesamtkraft und das Gesamtmoment lassen sich nach einer ergänzenden Arbeit von *E. Truckenbrodt*[2] durch einfache Summenformeln bestimmen.

Häufig interessiert aber auch das umgekehrte Problem, daß die Geschwindigkeitsverteilung vorgegeben ist, und die dazu gehörende Profilform gesucht wird. Diese Frage ist von Bedeutung beim Entwurf von Profilen, für die besondere Forderungen bezüglich Laminarhaltung, Verhaltens bei hohen *Mach*-Zahlen oder Kavitationssicherheit gestellt sind.

Die Behandlung dieses Problems ist nicht neu. Sie wurde erstmalig von *A. Betz*[3] auf der Grundlage der konformen Abbildung in Angriff genommen und später von *W. Mangler*[4] weiterentwickelt. Beiden Verfahren haften aber gewisse Schwierigkeiten an, die *F. Riegels*[5,6] veranlaßten, die Aufgabe mit Hilfe der bei der Berechnung der Geschwindigkeitsverteilung so erfolgreich angewandten Singularitätenmethode zu lösen. Nach diesem Verfahren ist es möglich, das Problem allgemeiner als mit der konformen Abbildung zu behandeln und insbesondere die Schwierigkeit der Erfüllung der Schließungsbedingung für die Profilkontur durch einen *Fourier*-Reihenansatz für die Profilkontur zu beheben.

Mittels des Quell-Senken-Verfahrens wird von *Riegels* der Fall des symmetrischen Profils ohne Anstellwinkel gelöst. Dabei wird die Aufgabe zurückgeführt auf die schrittweise Berechnung einer nichtlinearen Integralgleichung für die Profilneigung dy/dq, wobei y die Profilordinate und $x = \frac{1}{2} l \cos\varphi$ die Profilabszisse (Sehne) bedeuten. Die einzelnen Koeffizienten der *Fourier*schen Reihe für y erhält man durch eine Analyse aus der vorgegebenen Geschwindigkeitsverteilung. Da für die *Fourier*-Analyse ein Analysator zur Verfügung stand, ist *Riegels* bei der *Fourier*-Reihe stehen geblieben. Es liegt natürlich nahe, ähnlich wie es *Riegels* schon bei der Berechnung der Geschwindigkeitsverteilung aus einer vorgegebenen Profilkontur getan hat, die Bestimmung der einzelnen *Fourier*-Koeffizienten durch Anwendung der *Gauß*schen Quadratur zu umgehen und ein Summenverfahren zu entwickeln, bei dem nur über die Produkte des vorgegebenen Geschwindigkeitsbetrages an gewissen festen Stellen der Sehne mit festen ein für allemal berechneten Konstanten zu summieren ist. Hierüber wird im Abschnitt **2** berichtet.

Auch der Fall des Profils mit Wölbung und Anstellwinkel wurde von *Riegels* behandelt. Abgesehen davon, daß *Riegels* in seiner neueren Arbeit[1] zur Berechnung der Geschwindigkeitsverteilung die Erfassung des Anstellwinkeleinflusses anders vornimmt als in seiner älteren Arbeit[6] zur Berechnung der Profilkontur, läßt sich besonders dieser Abschnitt seiner Arbeit noch erheblich erweitern, was ja wohl auch schon von *Riegels* beabsichtigt war, wie aus einer Bemerkung auf S. 7 seiner älteren Arbeit hervorgeht. Auch bei der Behandlung des unsymmetrischen Profils bleibt *Riegels* bei der *Fourier*-Reihe stehen. Es ist daher Gegenstand der Abschnitte **3** und **4** außer der oben erwähnten Erweiterung und der Erfassung des neuen Anstellwinkeleinflusses auch die Ableitung des entsprechenden Summenverfahrens.

Bei der Ableitung unserer Formeln wollen wir uns nicht auf die älteren Arbeiten von *F. Riegels* beziehen, sondern sie aus der neueren Arbeit herleiten. Dieses geschieht einmal, weil die älteren Arbeiten schwer zugänglich sind, und zum anderen mit Rücksicht auf die neue Er-

---

[1] *F. Riegels*, Ing.-Arch. 16 (1948), S. 373 (I. Mitteilung), 17 (1949), S. 94 (II. Mitteilung) und 18 (1950), S. 329 (Berichtigung).
[2] *E. Truckenbrodt*, Ing.-Arch. 18 (1950), S. 324.
[3] *A. Betz*, Luftfahrtforschung 11 (1934), S. 1.
[4] *W. Mangler*, Jahrbuch 1938 der deutschen Luftfahrtforschung, S. I 46.
[5] *F. Riegels*, Z. angew. Math. Mech. 24 (1944), S. 273.
[6] *F. Riegels*, Untersuchungen und Mitteilungen der deutschen Luftfahrtforschung Nr. 3019 (1943).

fassung des Anstellwinkeleinflusses. Wir werden also stets auf die Formeln der I. bzw. II. Mitteilung der neueren Arbeit zurückgreifen.

2. Symmetrisches Profil ohne Anstellwinkel. Ist die Geschwindigkeitsverteilung auf Ober- und Unterseite des Profils an gleichen Stellen der Profilsehne die gleiche, so entspricht dieses einem symmetrischen Profil[1] (Profiltropfen) $y^{(0)}$, dessen Sehne in Strömungsrichtung verläuft, d.h. das nicht angestellt ist.

Formelmäßig können wir für diese Geschwindigkeitsverteilung schreiben

$$W = V + w_1 . \tag{1}$$

Hierin bedeutet V die Anströmgeschwindigkeit und w_1 die durch die Verdrängung des Profils entstehende Zusatzgeschwindigkeit. An der Vorderkante des Profils bildet sich ein Staupunkt, d.h. es muß dort sein $W = 0$.

Die Berechnung von w_1 geschieht mittels einer auf der Profilsehne angenommenen Quell-Senkenverteilung. Aus der Bedingung, daß an der Profiloberfläche keine Normalgeschwindigkeiten herrschen dürfen, findet man nach *F. Riegels*, Gleichung (9) der I. Mitteilung, die folgende Integralgleichung für die Profiltangenten dy/dx der Profiloberseite:

$$\frac{W}{V}(x) = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}}\left(1 + \frac{1}{\pi}\int_{-l/2}^{l/2} \frac{dy}{dx'}(x')\,\frac{dx'}{x-x'}\right). \tag{2}$$

Führen wir den Zusammenhang

$$x = \frac{l}{2}\cos\varphi \tag{3}$$

ein, dann wollen wir den gesuchten Profiltropfen durch die Reihe

$$y = \frac{l}{2}\sum_1 b_\nu \sin\nu\varphi \tag{4}$$

beschreiben. Dieser Ansatz bietet die Gewähr dafür, daß sich das Profil an der Vorderkante ($\varphi = \pi$) und an der Hinterkante ($\varphi = 0$) schließt.

Die Lösung der Gleichung (2) können wir unmittelbar von *F. Riegels*, Gleichung (12) der I. Mitteilung, übernehmen:

$$f\sin\varphi = \sum_1 \nu b_\nu \sin\nu\varphi . \tag{5}$$

Die neue Abkürzung f wollen wir als Geschwindigkeitsfunktion bezeichnen; sie berechnet sich zu

$$f = \varkappa\frac{W}{V} - 1 , \tag{6}$$

wobei

$$\varkappa = \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \tag{7}$$

einen Faktor darstellt, der nur an den Stellen großer Profilkrümmung (Vorderkante) von Bedeutung wird.

Ist die linke Seite der Gleichung (5) bekannt, so lassen sich die Koeffizienten νb_ν durch eine *Fourier*-Analyse bestimmen. Sie liefert

$$\nu b_\nu = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(\varphi')\sin\varphi'\sin\nu\varphi'\,d\varphi' . \tag{8}$$

Differentiieren wir Gleichung (4) nach φ und setzen den Ausdruck der Gleichung (8) ein, dann finden wir, wenn wir den Zusammenhang der Gleichung (3) beachten, nach einiger Zwischenrechnung als Lösung der Gleichung (2)

$$\frac{dy}{dx}(x) = -\frac{1}{\pi}\int_{-l/2}^{l/2}\left[\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx'}\right)^2}\,\frac{W}{V}(x') - 1\right]\sqrt{\frac{1-4\left(\frac{x'}{l}\right)^2}{1-4\left(\frac{x}{l}\right)^2}}\,\frac{dx'}{x-x'} . \tag{9}$$

[1] Der Einfachheit halber wollen wir zuweilen schreiben $y^{(0)} \equiv y$.

Bei der Lösung dieser Gleichung wollen wir so vorgehen, daß wir zunächst den Wurzelausdruck in der Klammer gleich eins setzen und entsprechend der vorgegebenen Geschwindigkeitsverteilung W/V die nullte Näherung für dy/dx berechnen. Diese Werte setzen wir dann in die Wurzel ein und berechnen die nächste Näherung. Die Iterationen setzen wir solange fort, bis keine Unterschiede mehr zwischen den einzelnen Schritten auftreten. Wie sich bei der Durchrechnung von Beispielen gezeigt hat, konvergiert dieses Verfahren verhältnismäßig schnell.

Nehmen wir für die Beschreibung des Profiltropfens nach Gleichung (4) eine endliche Reihe $\nu \leq N$ an, dann läßt sich für die Gleichung (9) mittels der *Gauß*schen Quadratur die folgende Summenformel angeben:

$$\bar{y}'_n = \frac{1}{l}\,\frac{dy^{(i)}}{d\varphi}\left(\varphi = \frac{\pi n}{N}\right) = \sum_{m=1}^{N-1} a_{mn} f_m \,. \tag{10}$$

Hierin bedeutet N die Anzahl der über den Bereich $0 \leq \varphi \leq \pi$ verteilten Punkte m, deren Lage sich entsprechend Gleichung (3) zu

$$x_m = \frac{l}{2}\cos\frac{\pi m}{N} \qquad \text{bzw.} \qquad \frac{\xi m}{l} = \bar{\xi}_m = \frac{1}{2}\left(1 + \cos\frac{\pi m}{N}\right) \tag{11}$$

berechnet. Es gilt dabei $m = 0$ für die Hinterkante und $m = N$ entsprechend für die Vorderkante.

Der Ausdruck $f_m = f\left(\varphi = \frac{\pi m}{N}\right)$ ist die an den Stellen m herrschende Geschwindigkeitsfunktion. Sie berechnet sich für den p-ten Näherungsschritt zu

$$f_m^{(p)} = \varkappa_m^{(p)} f_m^{(0)} + \varkappa_m^{(p)} - 1 \,, \tag{12}$$

wobei

$$f_m^{(0)} = \left(\frac{W}{V}\right)_m - 1 \tag{13}$$

und

$$\varkappa_m^{(p)} = \sqrt{1 + \left(\frac{\bar{y}_m'^{(p-1)}}{a_m}\right)^2} \tag{14}$$

ist. a_m und a_{mn} sind konstante Zahlen. Die Formeln zu ihrer Berechnung sind im Abschnitt 6 angegeben. Sie sind für $N = 12$ berechnet und in Tabelle 1 mitgeteilt.

Tabelle 1. a_m, a_{mn} $N = 12$

m		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
ξ_m/l		0,98297	0,93302	0,85356	0,75000	0,62941	0,50000	0,37059	0,25000	0,14645	0,06699	0,01704
a_m		0,12941	0,25000	0,35356	0,43302	0,48296	0,50000	0,48296	0,43302	0,35356	0,25000	0,12941
a_{mn}	$n=0$	0,16383	0	0,14226	0	0,10490	0	0,06177	0	0,02441	0	0,00284
	1	0	0,20854	0	0,13414	0	0,08627	0	0,04264	0	0,01137	0
	2	−0,05588	0	0,26219	0	0,12805	0	0,06912	0	0,02649	0	0,00305
	3	0	−0,13109	0	0,30178	0	0,11785	0	0,05178	0	0,01324	0
	4	−0,01198	0	−0,20119	0	0,32237	0	0,10246	0	0,03452	0	0,00381
	5	0	−0,03431	0	−0,25915	0	0,32197	0	0,08237	0	0,01852	0
	6	−0,00578	0	−0,05893	0	−0,30040	0	0,30040	0	0,05893	0	0,00578
	7	0	−0,01852	0	−0,08237	0	−0,32197	0	0,25915	0	0,03431	0
	8	−0,00381	0	−0,03452	0	−0,10246	0	−0,32237	0	0,20119	0	0,01198
	9	0	−0,01324	0	−0,05178	0	−0,11785	0	−0,30178	0	0,13109	0
	10	−0,00305	0	−0,02649	0	−0,06912	0	−0,12805	0	−0,26219	0	0,05588
	11	0	−0,01137	0	−0,04264	0	−0,08627	0	−0,13414	0	−0,20854	0
	12	−0,00284	0	−0,02441	0	−0,06177	0	−0,10490	0	−0,14226	0	−0,16383

Es ist bemerkenswert, daß die Werte a_{mn} verschwinden, wenn $|m-n|$ geradzahlig $(0, 2, 4 \ldots)$. Diese Tatsache ist besonders wertvoll für die Durchführung der bereits oben erwähnten Iterationsmethode.

Um die nullte Näherung zu berechnen, setzen wir $\varkappa_m^{(0)} = 1$, was für $f_m^{(0)}$ den Wert der Gleichung (13) ergibt, der unmittelbar aus der vorgegebenen Geschwindigkeitsverteilung entnommen werden kann. Diese Werte setzen wir in Gleichung (10) ein und bestimmen für die Punkte $n = 1, 3 \ldots$ die Profilneigungen $\bar{y}'^{(0)}_n$.

Mittels der Gleichungen (12), (13) und (14) errechnen wir dann für dieselben Punkte $m = 1, 3 \ldots$ die Funktionswerte $f_m^{(1)}$, die dann, in Gleichung (10) eingesetzt, die erste Näherung für die Profilneigungen $\bar{y}'^{(1)}_n$ an den Stellen $n = 2, 4 \ldots$ ergeben.

Die zweite und folgenden Näherungen gehen dann entsprechend vor sich. Hat man gute Übereinstimmung zwischen den letzten Näherungen erzielt, so empfiehlt es sich, noch die Werte an der Vorderkante $\bar{y}'_N$ und an der Hinterkante $\bar{y}'_0$ zu berechnen. Die erforderlichen Quadraturkonstanten sind ebenfalls in Tabelle 1 mitgeteilt. Kennt man jetzt den Verlauf $\bar{y}'(\varphi)$, so ergibt eine Integration über φ die gesuchten Profilordinaten $\bar{y}^{(t)}_n$, die man lediglich an den n zugeordneten Stellen $\bar{\xi}_n$ aufzutragen hat. Mit Rücksicht auf die Schließungsbedingung muß sein

$$\int_0^\pi \frac{d\bar{y}}{d\varphi}\, d\varphi = \sum_{n=1}^{N-1} \bar{y}'_n + \frac{1}{2}\,(\bar{y}'_N + \bar{y}'_0) = 0\,.$$

Die Durchführung des eben beschriebenen Verfahrens wird im Abschnitt 5 an Hand eines Beispiels gezeigt.

Der Vollständigkeit halber sei noch eine Beziehung zur unmittelbaren Berechnung der Profilordinate abgeleitet. Durch Einsetzen der Gleichung (8) in die Gleichung (4) erhalten wir nach einiger Zwischenrechnung

$$\frac{y^{(t)}}{l} = \frac{1}{4\pi}\int_0^\pi f(\varphi')\,\sin\varphi'\,\ln\frac{1-\cos(\varphi+\varphi')}{1-\cos(\varphi-\varphi')}\,d\varphi'\,. \tag{15}$$

Dieses Ergebnis erhält man natürlich auch, wenn man Gleichung (9) über x integriert. Zur numerischen Auswertung dieser Formel dient die Summenformel

$$\bar{y}^{(t)}_n = \frac{y^{(t)}}{l}\left(\varphi = \frac{\pi n}{N}\right) = \sum_{m=1}^{N-1} b_{mn} f_m\,. \tag{16}$$

Die Formel für b_{mn} ist in Abschnitt 6 und die Zahlenwerte für $N=12$ sind in Tabelle 2 mitgeteilt.

Tabelle 2. b_{mn} $N = 12$

m		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
ξ_m/l		0,98297	0,93302	0,85356	0,75000	0,62941	0,50000	0,37059	0,25000	0,14645	0,06699	0,01704
b_{mn}	$n=0$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	1	0,02616	0,02372	0,01892	0,01699	0,01382	0,01111	0,00811	0,00552	0,00320	0,00148	0,00037
	2	0,01228	0,06392	0,04742	0,03556	0,02968	0,02270	0,01689	0,01120	0,00660	0,00299	0,00076
	3	0,00692	0,03353	0,10052	0,06770	0,04777	0,03711	0,02631	0,01770	0,01016	0,00466	0,00117
	4	0,00508	0,02053	0,05528	0,13038	0,08167	0,05399	0,03869	0,02483	0,01445	0,00647	0,00165
	5	0,00370	0,01537	0,03497	0,07323	0,14979	0,08750	0,05354	0,03469	0,01926	0,00874	0,00217
	6	0,00288	0,01135	0,02624	0,04675	0,08452	0,15652	0,08452	0,04675	0,02624	0,01135	0,00288
	7	0,00217	0,00874	0,01926	0,03469	0,05354	0,08750	0,14979	0,07323	0,03497	0,01537	0,00370
	8	0,00165	0,00647	0,01445	0,02483	0,03869	0,05399	0,08167	0,13038	0,05528	0,02053	0,00508
	9	0,00117	0,00466	0,01016	0,01770	0,02631	0,03711	0,04777	0,06770	0,10052	0,03353	0,00692
	10	0,00076	0,00299	0,00660	0,01120	0,01689	0,02270	0,02968	0,03556	0,04742	0,06392	0,01228
	11	0,00037	0,00148	0,00320	0,00552	0,00811	0,01111	0,01382	0,01699	0,01892	0,02372	0,02616
	12	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

3. Skelettprofil mit Anstellwinkel. Ist die Geschwindigkeitsverteilung auf Ober- und Unterseite an gleichen Stellen der Profilsehne voneinander verschieden und folgt der Beziehung

$$W = V \pm w_2\,, \tag{17}$$

wobei das obere Vorzeichen für die Oberseite und das untere entsprechend für die Unterseite gilt, so entspricht dieses einem Skelettprofil, d.h. einem Profil verschwindender Dicke[1] $y^{(s)}$, das unter einem bestimmten Anstellwinkel α angeblasen wird. Damit an der Hinterkante glatter Abfluß herrscht, d.h. die *Kutta-Joukowski*sche Abflußbedingung erfüllt ist, muß an der Hinterkante $w_2 = 0$ sein.

Die Berechnung von w_2 geschieht mittels einer auf der Sehne angenommenen Wirbelverteilung. Aus der Bedingung, daß an der Skelettlinie keine Normalgeschwindigkeiten herrschen dürfen, findet man für die Skelett-Tangenten dy/dx nach *F. Riegels*, Gleichungen (1), (17) und (21) der II. Mitteilung,

$$\frac{dy}{dx}(x) - \alpha = -\frac{1}{\pi}\int_{-l/2}^{l/2} \frac{w_2}{V}(x')\,\frac{dx'}{x-x'}\,. \tag{18}$$

[1] Wir wollen zuweilen schreiben $y^{(s)} \equiv y$.

Es bedeuten hierin y die Ordinaten der Skelettlinie und α den Anstellwinkel, beide von der Sehne aus gemessen.

Zur Vereinfachung der weiteren Rechnungen wollen wir vorübergehend von dem profilfesten Koordinatensystem auf das strömungsfeste System übergehen. Dann gilt

$$y^* = y - \alpha x + K_1 , \tag{19}$$

wobei K_1 eine willkürliche Konstante bedeutet.

Analog zu Gleichung (4) machen wir für die gesuchte Skelettlinie den trigonometrischen Reihenansatz

$$y^* = \frac{l}{2} \sum_1 a_\nu^* \cos \nu\varphi . \tag{20}$$

Wir können die Lösung der Gleichung (18) unmittelbar von *F. Riegels* übernehmen, Gleichung (37) der II. Mitteilung:

$$g \sin\varphi = \sum_1 \nu a_\nu^* (\cos \nu\varphi - 1) . \tag{21}$$

Hierin bezeichnet

$$g = \frac{w_2}{V} = \pm \left(\frac{W}{V} - 1 \right) \tag{22}$$

die vorgegebene Geschwindigkeitsverteilung.

Durch eine *Fourier*-Analyse können wir die Koeffizienten νa_ν^* aus Gleichung (21) wie folgt berechnen:

$$\nu a_\nu^* = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi g(\varphi') \sin\varphi' \cos \nu\varphi' \, d\varphi' . \tag{23}$$

Diesen Ausdruck setzen wir in Gleichung (20) ein und erhalten nach einiger Zwischenrechnung

$$\frac{y^*}{l} = -\frac{1}{4\pi} \int_0^\pi g(\varphi') \sin\varphi' \ln \left[(1 - \cos(\varphi + \varphi'))(1 - \cos(\varphi - \varphi')) \right] d\varphi' + K_2 , \tag{24}$$

wobei K_2 wieder eine willkürliche Konstante bedeutet.

Den Anstellwinkel, das ist der Winkel zwischen der Sehne (Verbindungsgerade zwischen Vorder- und Hinterkante) und der Anströmrichtung, finden wir leicht zu

$$\alpha^{(s)} = \frac{y^*}{l}(\pi) - \frac{y^*}{l}(0) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi g(\varphi') \sin\varphi' \ln \operatorname{tg} \frac{\varphi'}{2} \, d\varphi' . \tag{25}$$

Ist uns jetzt y^* bekannt, so können wir wieder auf das profilfeste Koordinatensystem durch die Beziehung

$$y^{(s)} = y^* - \frac{1}{2} \left(y^*(\pi) + y^*(0) \right) + \frac{\cos\varphi}{2} \left(y^*(\pi) - y^*(0) \right) \tag{26}$$

übergehen.

Nehmen wir für die Beschreibung der Skelettlinie, Gleichung (20), eine endliche Reihe $\nu \leqq N$ an, dann können wir für Gleichung (24) mittels der *Gauß*schen Quadratur die folgende Summenformel herleiten:

$$\bar{y}_n^* = \left(\frac{y^*}{l} \right)_n = \sum_{m=1}^{N-1} d_{mn}^* g_m + d_{Nn}^* \lim_{\varphi \to \pi} (g \sin\varphi) . \tag{27}$$

Hierin gilt $g_m = g\left(\varphi = \frac{\pi m}{N} \right)$. Das zweite Glied tritt auf, wenn die Geschwindigkeitsverteilung an der Vorderkante gegen Unendlich geht. d_{mn}^* sind konstante Zahlen. Die Formeln zu ihrer Berechnung sind in Abschnitt 6 angegeben.

Unter Beachtung der Gleichung (25) finden wir dann sofort für den Anstellwinkel die Summenformel

$$\alpha^{(s)} = \sum_{m=1}^{N-1} d_m g_m + d_N \lim_{\varphi \to \pi} (g \sin\varphi) . \tag{28}$$

Den Übergang vom strömungsfesten System auf das profilfeste System nehmen wir nach Gleichung (26) vor und finden

$$\bar{y}_n^{(s)} = \frac{y^{(s)}}{l}\left(\varphi = \frac{\pi n}{N}\right) = \sum_{m=1}^{N-1} d_{mn}\, g_m + d_{Nn} \lim_{\varphi \to \pi} (g \sin\varphi)\,. \tag{29}$$

Die Bedeutung der Konstanten d_m und d_{mn} ist in Abschnitt **6** angegeben. Sie sind für $N = 12$ berechnet und in Tabelle 4 mitgeteilt.

Da $g_m = \pm\left(\left(\frac{W}{V}\right)_m - 1\right)$ unmittelbar aus der vorgegebenen Geschwindigkeitsverteilung entnommen wird, geht die Berechnung des Anstellwinkels sowie der Skelettordinaten in sehr einfacher Weise vor sich. Die gefundenen Werte $\bar{y}_n^{(s)}$ sind dann an den n zugeordneten Stellen $\bar{\xi}_n$ aufzutragen. Die Durchrechnung eines Beispiels wird im Abschnitt **5** gezeigt.

Der Vollständigkeit halber sei noch die Summenformel zur Berechnung der Skelettneigung angegeben.

$$\bar{y}_n^{*\prime} = \frac{1}{l}\frac{dy^*}{d\varphi}\left(\varphi = \frac{\pi n}{N}\right) = \sum_{m=1}^{N-1} c_{mn}\, g_m + c_{Nn} \lim_{\varphi \to \pi} (g \sin\varphi). \tag{30}$$

Die Formeln für c_{mn} sind in Abschnitt **6**, die Zahlenwerte für $N = 12$ in Tabelle 3 mitgeteilt.

Tabelle 3. c_{mn} $N = 12$

	m	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
	ξ_m/l	0,98297	0,93302	0,85356	0,75000	0,62941	0,50000	0,37059	0,25000	0,14645	0,06699	0,01704	0
c_{mn}	$n = 0$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	1	0	0,10795	0	0,04009	0	0,02233	0	0,01274	0	0,00589	0	0,00549
	2	−0,10795	0	0,18540	0	0,06628	0	0,03578	0	0,01873	0	0,00589	0
	3	0	−0,18540	0	0,24640	0	0,08333	0	0,04227	0	0,01873	0	0,01726
	4	−0,04009	0	−0,24640	0	0,28904	0	0,09187	0	0,04228	0	0,01274	0
	5	0	−0,06628	0	−0,28904	0	0,31100	0	0,09187	0	0,03578	0	0,03197
	6	−0,02233	0	−0,08333	0	−0,31100	0	0,31100	0	0,08333	0	0,02233	0
	7	0	−0,03578	0	−0,09187	0	−0,31100	0	0,28904	0	0,06628	0	0,05430
	8	−0,01274	0	−0,04228	0	−0,09187	0	−0,28904	0	0,24640	0	0,04009	0
	9	0	−0,01873	0	−0,04227	0	−0,08333	0	−0,24640	0	0,18540	0	0,10059
	10	−0,00589	0	−0,01873	0	−0,03578	0	−0,06628	0	−0,18540	0	0,10795	0
	11	0	−0,00589	0	−0,01274	0	−0,02233	0	−0,04009	0	−0,10795	0	0,31649
	12	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Tabelle 4. d_m . d_{mn} $N = 12$

	m	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
	ξ_m/l	0,98297	0,93302	0,85356	0,75000	0,62941	0,50000	0,37059	0,25000	0,14645	0,06699	0,01704	0
	d_m	−0,04530	−0,05399	−0,05248	−0,03932	−0,02147	0	0,02147	0,03932	0,05248	0,05399	0,04530	0,15652
d_{mn}	$n = 0$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	1	0,01007	0,00978	0,00300	0,00427	0,00148	0,00204	0,00029	0,00050	−0,00054	−0,00038	−0,00066	−0,00216
	2	−0,00925	0,04079	0,02319	0,01342	0,00965	0,00590	0,00314	0,00072	−0,00109	−0,00207	−0,00227	−0,00905
	3	−0,01716	−0,00696	0,07116	0,04083	0,02199	0,01528	0,00695	0,00248	−0,00241	−0,00418	−0,00498	−0,01947
	4	−0,01831	−0,00703	0,02494	0,10089	0,05325	0,02813	0,01531	0,00466	−0,00284	−0,00703	−0,00815	−0,03316
	5	−0,01763	−0,01022	0,00550	0,04412	0,12007	0,05977	0,02659	0,01065	−0,00304	−0,00925	−0,01178	−0,04817
	6	−0,01494	−0,01111	0	0,01925	0,05577	0,12778	0,05577	0,01925	0	−0,01111	−0,01494	−0,06389
	7	−0,01178	−0,00925	−0,00304	0,01065	0,02659	0,05977	0,12007	0,04412	0,00550	−0,01022	−0,01763	−0,07757
	8	−0,00815	−0,00703	−0,00284	0,00466	0,01531	0,02813	0,05325	0,10089	0,02494	−0,00703	−0,01831	−0,08872
	9	−0,00498	−0,00418	−0,00241	0,00248	0,00695	0,01528	0,02199	0,04083	0,07116	0,00696	−0,01716	−0,09303
	10	−0,00227	−0,00207	−0,00109	0,00072	0,00314	0,00590	0,00965	0,01342	0,02319	0,04079	−0,00925	−0,09061
	11	−0,00066	−0,00038	−0,00054	0,00050	0,00029	0,00204	0,00148	0,00427	0,00300	0,00978	0,01007	−0,06584
	12	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

4. Unsymmetrisches Profil mit Anstellwinkel. Wir wollen in diesem Abschnitt den allgemeinen Fall des unsymmetrischen Profils mit Anstellwinkel behandeln.

Die Geschwindigkeitsverteilung ist an gleichen Stellen der Profilsehne auf Ober- und Unterseite verschieden. Wir wollen dafür schreiben

$$W = V + w_1 \pm w_2 \pm \alpha w_3\,. \tag{31}$$

Über die Bedeutung der Zusatzgeschwindigkeiten w_1 und w_2 wurde bereits in den Abschnitten **2** und **3** berichtet. Die Geschwindigkeitskomponente w_3 entsteht dadurch, daß der endlich dicke Profilkörper unter dem Anstellwinkel $\alpha = 1$ angeblasen wird. Das obere Vorzeichen gilt wieder für die Profiloberseite, das untere entsprechend für die Unterseite. Es sei bemerkt, daß vom physikalischen Standpunkt aus die Geschwindigkeitsverteilung nur endlich große Werte haben kann.

Ist uns jetzt die Geschwindigkeitsverteilung auf der Oberseite mit W_o und auf der Unterseite mit W_u gegeben, so berechnen sich die einzelnen Geschwindigkeitskomponenten wie folgt:

$$V + w_1 = \frac{1}{2}(W_o + W_u) \quad \text{und} \quad w_2 + \alpha w_3 = \frac{1}{2}(W_o' - W_u). \tag{32}$$

Um die Geschwindigkeit, die an der Oberfläche herrscht, auf die Geschwindigkeit auf der Sehne umzurechnen, ist nach *Riegels* die Oberflächengeschwindigkeit mit dem Faktor

$$\varkappa = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

zu multiplizieren. Bei einem unsymmetrischen Profilkörper sind die Profiltangenten dy/dx an gleichen Stellen der Sehne auf Ober- und Unterseite verschieden. Da der Faktor $\varkappa$ nur von Bedeutung ist an den Stellen großer Profilkrümmung (Vorderkante), die im wesentlichen von der Tropfenform abhängt, wollen wir den Skelettlinieneinfluß vernachlässigen und machen die folgende Vereinfachung:

$$\varkappa = \sqrt{1 + \left(\frac{dy^{(t)}}{dx}\right)^2}. \tag{33}$$

Hierin bedeuten $y^{(t)}$ die Ordinaten des Profiltropfens.

Auf Grund der gemachten Vereinfachung können wir die Tropfenform sofort berechnen, wenn wir in Abschnitt **2** für die Geschwindigkeitsverteilung

$$W \equiv \frac{1}{2}(W_o + W_u)$$

bzw. für Gleichung (6)

$$f \equiv \frac{\varkappa}{2}\frac{W_o + W_u}{V} - 1 \tag{34}$$

setzen. Das dort beschriebene Iterationsverfahren, Gleichung (10), liefert die Profiltangenten $\bar{y}^{(t)\prime}$ in Abhängigkeit vom Winkel φ, was durch Integration über φ die gesuchten Ordinaten des Profiltropfens $\bar{y}^{(t)}$ ergibt.

Setzen wir die Komponente w_3, die ja nur von der Profiltropfenform abhängt, als bekannt voraus, so können wir die Skelettform und den Anstellwinkel nach Abschnitt **3** berechnen, wenn wir für die dort benötigte Geschwindigkeitsverteilung

$$w_2 \equiv \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\left(\frac{1}{2}(W_o - W_u) - \alpha w_3\right)$$

bzw. für Gleichung (22)

$$g \equiv \frac{\varkappa}{2}\frac{W_o - W_u}{V} + \Delta g \tag{35}$$

setzen. Es gilt

$$\Delta g = -\alpha\varkappa\frac{w_3}{V}. \tag{36}$$

Die Rechnung nach Abschnitt **3** führen wir durch, indem wir zunächst $\Delta g = 0$ setzen, d.h. mit

$$g = \frac{\varkappa}{2}\frac{W_o - W_u}{V} \quad \text{bzw.} \quad \lim_{\varphi\to\pi}(g\sin\varphi) = \frac{W_o - W_u}{V}(\pi)\left|\frac{1}{l}\frac{dy^{(t)}}{d\varphi}(\pi)\right|. \tag{35a}$$

Den Faktor $\varkappa$ entnehmen wir unmittelbar der Rechnung für den Profiltropfen, Abschnitt **2**. Die Anwendung der Gleichungen (28) und (29) liefert dann den Anstellwinkel $\alpha^{(s)}$ und die Ordinaten der Skelettlinie $\bar{y}^{(s)}$, beide von der Profilsehne aus gemessen.

Die bisher vernachlässigte Geschwindigkeitskomponente w_3 berechnet sich nach *F. Riegels*, Gleichung (33) der II. Mitteilung, zu

$$\frac{w_3}{V}(x) = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}}\frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{l-2x}{l+2x}}\int_{-l/2}^{l/2}\left(\frac{dy^{(t)}}{dx'} - \frac{2}{l}\frac{y^{(t)}}{1 - 4\left(\frac{x'}{l}\right)^2}\right)\frac{dx'}{x - x'}. \tag{37}$$

Unter Berücksichtigung des *Fourier*-Reihenansatzes der Gleichung (4) übernehmen wir die Lö-

sung unmittelbar von *F. Riegels*, Gleichung (38) der II. Mitteilung:

$$\varkappa \frac{w_3}{V} = \frac{1-\cos\varphi}{\sin\varphi} \sum_0 \beta_\mu \cos\mu\varphi \tag{38}$$

$$\text{mit} \quad \beta_0 = \sum_1 \nu b_\nu \quad \text{und} \quad \beta_\mu = 2 \sum_{\nu=1} \left[(2\nu+\mu-1)\, b_{2\nu+\mu-1} + 2\nu b_{2\nu+\mu}\right].$$

Setzen wir jetzt Gleichung (38) in Gleichung (36) und diese wiederum in Gleichung (23) ein, dann erhalten wir nach Ausführung der Integration

$$\nu\, \Delta a_\nu^* = -\frac{\alpha}{2}(2\beta_\nu - \beta_{\nu-1} - \beta_{\nu+1}) \quad \text{für} \quad \nu \neq 1$$

und

$$\Delta a_1^* = -\frac{\alpha}{2}(2\beta_1 - 2\beta_0 - \beta_2). \tag{39}$$

Wir differentiieren Gleichung (20) nach φ und setzen die Werte der Gleichung (39) ein, dann erhalten wir nach einiger Zwischenrechnung

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{l}\Delta\frac{dy^*}{d\varphi} &= -\frac{\alpha}{2}\left[\beta_0 \sin\varphi - (1-\cos\varphi)\sum_1 \beta_\mu \sin\mu\varphi\right] \\ &= -\frac{\alpha}{2}\,\frac{1-\cos\varphi}{\sin\varphi} \sum_{\nu=1} \left(\nu\cos\nu\varphi + \frac{\sin\nu\varphi}{\sin\varphi}\right) b_\nu . \end{aligned}\right| \tag{40}$$

Die Integration über φ liefert

$$\Delta y^* = -\alpha \operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}\,\frac{l}{2}\sum_1 b_\nu \sin\nu\varphi = -\alpha \operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}\, y^{(t)}. \tag{41}$$

Die letzte Beziehung folgt aus Gleichung (4). Wir können also den Einfluß, der durch die Anstellung des Profiltropfens hervorgerufen wird in sehr einfacher Weise als eine zusätzlich Skelettlinienänderung deuten.

Die entsprechende Anstellwinkeländerung ergibt sich nach Gleichung (25) zu

$$\Delta\alpha = -\alpha \lim_{\varphi\to\pi}\left(\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}\,\frac{y^{(t)}}{l}\right) = \alpha\,\frac{2}{l}\,\frac{dy^{(t)}}{d\varphi}(\pi). \tag{42}$$

Den gesamten Anstellwinkel erhalten wir aus der Summe

$$\alpha = \alpha^{(s)} + \Delta\alpha .$$

Setzen wir Gleichung (42) ein, dann wird

$$\alpha = \frac{\alpha^{(s)}}{1 - \frac{2}{l}\,\frac{dy^{(t)}}{d\varphi}(\pi)} = \frac{\alpha^{(s)}}{1 - 2\bar{y}_N^{(t)\prime}}. \tag{43}$$

Um die strömungsfesten Ordinaten der Gleichung (41) auf die profilfesten Ordinaten $\Delta y^{(s)}$ umzurechnen, benutzen wir Gleichung (26) und erhalten für die Skelettlinienänderung

$$\Delta y^{(s)} = -\alpha(1-\cos\varphi)\left(\frac{y^{(t)}}{\sin\varphi} + \frac{dy^{(t)}}{d\varphi}(\pi)\right). \tag{44}$$

An den Punkten n ergibt sich

$$\Delta\bar{y}_n^{(s)} = \Delta\frac{y^{(s)}}{l}\left(\varphi = \frac{\pi n}{N}\right) = -\alpha\left(p_n \bar{y}_n^{(t)} + q_n \bar{y}_N^{(t)\prime}\right). \tag{45}$$

Die Formeln für die Konstanten p_n und q_n sind in Abschnitt 6 angegeben. Sie sind für $N=12$ berechnet und in Tabelle 5 mitgeteilt. Ist also der Anstellwinkel nach Gleichung (43) berechnet, so kann auch sofort $\Delta\bar{y}^{(s)}$ berechnet werden.

Tabelle 5. p_n, q_n $N=12$.

n	ξ_n/l	p_n	q_n
1	0,98 297	0,13 165	0,03 407
2	0,93 302	0,26 795	0,13 397
3	0,85 356	0,41 421	0,29 289
4	0,75 000	0,57 735	0,50 000
5	0,62 941	0,76 733	0,74 118
6	0,50 000	1,00 000	1,00 000
7	0,37 059	1,30 323	1,25 882
8	0,25 000	1,73 205	1,50 000
9	0,14 645	2,41 421	1,70 711
10	0,06 699	3,73 205	1,86 603
11	0,01 704	7,59 575	1,96 593

Wir setzen nunmehr die drei Anteile $y^{(t)}$ (Abschnitt 2), $y^{(s)}$ (Abschnitt 3) und $\Delta y^{(s)}$ (Abschnitt 4) zusammen und erhalten die gesuchten Ordinaten wie folgt:

$$y = y^{(t)} \pm y^{(s)} \pm \Delta y^{(s)}. \tag{46}$$

Abschließend sei noch darauf hingewiesen, daß die Ergebnisse aus den Integralformeln mit denen aus den Summenformeln identisch sind, wenn sich die Profiltropfenform durch eine sin-Reihe und die Skelettlinienform durch eine cos-Reihe bis zum Gliede N (= 12) darstellen lassen.

5. Beispiele. Um die Brauchbarkeit der in den Abschnitten 2, 3 und 4 abgeleiteten Formeln zu zeigen, haben wir zunächst für einige bekannte Fälle die Rechnungen durchgeführt. Dabei sind sowohl die Integral- als auch die Summenformeln geprüft. Im Anschluß daran wird für eine willkürlich gewählte Geschwindigkeitsverteilung die Profilform ermittelt.

a) Ellipsenprofil ohne Anstellwinkel. (Abschnitt 2.) Die Geschwindigkeitsverteilung ist gegeben durch

$$\frac{W}{V} = \frac{1+a}{\sqrt{1+a^2\,\mathrm{ctg}^2\varphi}}\,. \tag{47}$$

Mittels Gleichung (10) haben wir für $a = 1/4$ die Profilneigungen des gesuchten Tropfens berechnet. Bereits nach der dritten Näherung ergeben sich Zahlenwerte die von den Werten $\bar{y}'_n = \frac{1}{8}\cos\frac{\pi n}{N}$ nur noch geringfügig abweichen. Durch Integration finden wir

$$\frac{y^{(t)}}{l} = \frac{a}{2}\sin\varphi\,, \tag{48}$$

was die Ordinaten eines Ellipsenprofils vom Dickenverhältnis $t/l = a = 1/4$ sind. Da der Wurzelausdruck in Gleichung (47) den Faktor $\varkappa$ nach Gleichung (7) darstellt, können wir für die Geschwindigkeitsfunktion nach Gleichung (6) schreiben $f = a$, was, in Gleichung (15) eingesetzt, ebenfalls das Ergebnis der Gleichung (48) ergibt.

b) Ebene Platte mit Anstellwinkel. (Abschnitt 3.) Die Geschwindigkeitsverteilung ist gegeben durch

$$\frac{W}{V} = 1 \pm a\,\mathrm{tg}\,\frac{\varphi}{2}\,. \tag{49}$$

Mit $g = a\,\mathrm{tg}\,\frac{\varphi}{2}$ nach Gleichung (22) liefern sowohl die Integralformeln (24), (25) und (26) als auch die Summenformeln (28) und (29) das richtige Ergebnis

$$\alpha^{(s)} = a \quad \text{und} \quad y^{(s)} = 0\,. \tag{50}$$

c) Parabel-(Kreisbogen)-Skelett ohne Anstellwinkel. (Abschnitt 3.) Die Geschwindigkeitsverteilung ist gegeben durch

$$\frac{W}{V} = 1 \pm a\sin\varphi \quad \text{bzw.} \quad g = a\sin\varphi\,. \tag{51}$$

Auch bei diesem Beispiel liefern Integral- und Summenformeln das richtige Ergebnis

$$\alpha^{(s)} = 0 \quad \text{und} \quad \frac{y^{(s)}}{l} = \frac{a}{4}\sin^2\varphi\,. \tag{52}$$

Es stellt $a/4 = f/l$ die Wölbungshöhe dar.

d) Skelettprofil mit konstanter Geschwindigkeitsverteilung. (Abschnitt 3.) Wir wollen den Fall betrachten, daß auf Ober- und Unterseite jeweils konstante Geschwindigkeiten herrschen. An der Hinterkante muß sich die Geschwindigkeitsverteilung unstetig ändern, um die Abflußbedingung zu erfüllen, die fordert, daß dort Anströmgeschwindigkeit herrscht. Es ist

$$\frac{W}{V} = 1 \pm a \quad \text{bzw.} \quad g = a\,. \tag{53}$$

Die Anwendung der Gleichungen (25) und (28) ergibt $\alpha^{(s)} = 0$. Gleichung (26) in Verbindung mit Gleichung (24) liefert in bekannter Weise

$$\frac{y^{(s)}}{l} = -\frac{a}{2\pi}\left[(1-\cos\varphi)\ln\frac{1-\cos\varphi}{2} + (1+\cos\varphi)\ln\frac{1+\cos\varphi}{2}\right]. \tag{54}$$

Die Werte nach der Summenformel (29) weichen gegenüber den exakten etwas ab. Siehe Abb. 1 und Tabelle 6.

e) Symmetrisches *Joukowski*-Profil mit Anstellwinkel. (Abschnitt 2, 3 und 4.) Die Geschwindigkeitsverteilung ist gegeben durch

$$\frac{W}{V} = \frac{1+\varepsilon(1-2\cos\varphi)+a(1-2\varepsilon\cos\varphi)\,\mathrm{tg}\,\frac{\varphi}{2}}{\sqrt{1+\varepsilon^2\left(\frac{\cos\varphi-\cos 2\varphi}{\sin\varphi}\right)^2}}\,. \tag{55}$$

Wenn

$$\frac{y^{(s)}}{l} = \frac{\varepsilon}{2} \sin\varphi\,(1 - \cos\varphi) \tag{56}$$

die gesuchte Profilform ist, dann stellt der Wurzelausdruck in Gleichung (55) den Faktor $\varkappa$ nach Gleichung (7) dar, womit man die Geschwindigkeitsfunktion nach Gleichung (34) zu

$$f = \varepsilon(1 - 2\cos\varphi) \tag{57}$$

erhält. Setzen wir f in Gleichung (15) ein, dann finden wir das angenommene Ergebnis der Gleichung (56) bestätigt. Die Profilkontur entspricht dem symmetrischen *Joukowski*-Profil. Für Gleichung (35a) ergibt sich

$$g = a \operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}(1 - 2\varepsilon\cos\varphi) = a\left[(1 + 2\varepsilon)\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} - 2\varepsilon\sin\varphi\right]. \tag{58}$$

Hierfür können wir das Ergebnis sofort aus den Beispielen b und c entnehmen. Und zwar ist

$$\alpha^{(s)} = (1 + 2\varepsilon)a \quad \text{und} \quad \frac{y^{(s)}}{l} = -\frac{\varepsilon}{2}\sin^2\varphi\, a\,. \tag{59}$$

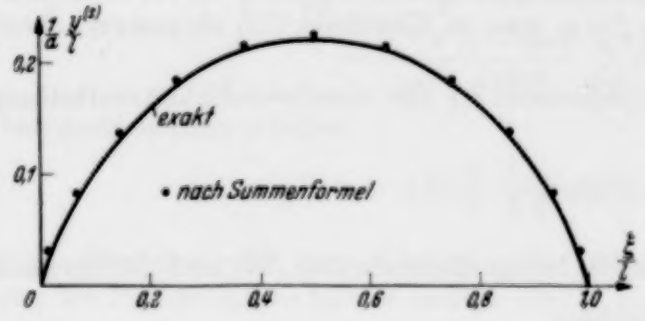


Abb. 1. Skelettprofil mit konstanter Geschwindigkeitsverteilung. (Beispiel 5d.)

Tabelle 6. *Zum Beispiel 5d.*

n	φ	ξ/l	y/l exakt	y/l Summenformel
12	π	0	0	0
8	$2\pi/3$	1/4	0,1790 a	0,1838 a
6	$\pi/2$	1/2	0,2206 a	0,2257 a

Berücksichtigen wir jetzt die Formeln des Abschnittes 4, dann wird für die Skelettlinienänderung nach Gleichung (44)

$$\Delta\frac{y^{(s)}}{l} = \frac{\varepsilon}{2}\sin^2\varphi\, a\,. \tag{60}$$

Addieren wir diesen Wert zu dem der Gleichung (59), so ergeben sich die Ordinaten der Skelettlinie zu null, d.h. wir haben es mit einem symmetrischen Profil zu tun. Für den Anstellwinkel finden wir nach Gleichung (43)

$$\alpha = a \tag{61}$$

in Übereinstimmung mit der exakten Lösung.

f) Profil mit willkürlich gewählter Geschwindigkeitsverteilung. (Abschnitt 2, 3 und 4). An Hand einer willkürlich gewählten Geschwindigkeitsverteilung wollen wir jetzt den Gang einer vollständigen Rechnung kurz erläutern.

Die gewählte Geschwindigkeitsverteilung ist in Abbildung 2 dargestellt. Auf Ober- bzw. Unterseite hat die Geschwindigkeit im Bereich $0{,}1 \leq \frac{\xi}{l} \leq 0{,}6$ konstante Werte, und zwar $W_o/V = 1{,}3$ bzw. $W_u/V = 1{,}0$. Im Bereich $0{,}6 \leq \frac{\xi}{l} \leq 1{,}0$ fällt die Geschwindigkeit linear auf den Wert an der Hinterkante $W/V = 0{,}8$ ab. Dem Verlauf im Bereich $0 \leq \frac{\xi}{l} \leq 0{,}1$ liegt kein besonderer analytischer Ansatz zugrunde. In Tabelle 7 sind die Werte W/V für die Stellen m angegeben.

Wir berechnen zunächst die Werte $\frac{1}{2}\frac{W_o + W_u}{V}$ und $\frac{1}{2}\frac{W_o - W_u}{V}$. Die beiden Kurven sind in Abbildung 2 gestrichelt eingezeichnet.

Ausgehend von Gleichung (34) bestimmen wir gemäß Gleichung (13) die nullte Näherung für f, d.h. $f_m^{(0)}$. Die Anwendung der Gleichung (10) liefert dann die nullte Näherung für die Neigungen des gesuchten Profiltropfens $\bar{y}_n'^{(0)}$. Wir bestimmen diese für die Stellen $n = 1, 3, \ldots 11$. Aus $\bar{y}'^{(0)}$ berechnen wir nach Gleichung (14) den Faktor $\varkappa_m^{(1)}$, und damit nach Gleichung (12) die Geschwindigkeitsfunktion $f_m^{(1)}$. Eine nochmalige Anwendung der Gleichung (10) ergibt $\bar{y}_n'^{(1)}$, die wir

für $n = 2{,}4 \ldots 10$ berechnen. Nun bestimmen wir $\varkappa_m^{(2)}$ und $f_m^{(2)}$ und berechnen $\bar{y}_n'^{(2)}$ $(n = 1{,}3 \ldots 11)$. Die weiteren Näherungsschritte werden entsprechend durchgeführt. Beim fünften und auch letzten Schritt haben wir noch die Werte an der Nase $\bar{y}_N'$ und an der Hinterkante $\bar{y}_o'$ ermittelt. Wie aus der Zusammenstellung hervorgeht, konvergiert das Verfahren sehr schnell. Bereits nach der dritten Näherung ist nahezu der Endwert erreicht. Der Vollständigkeit halber haben wir in der Tabelle 7 noch die Werte für $\varkappa_m$ und f_m nach der letzten Näherung angegeben. Durch graphische Integration der Werte $\bar{y}'$ über φ und Auftragung über ξ/l erhalten wir die Ordinaten des Profiltropfens $\bar{y}^{(t)}$, wie sie in der Tabelle und in Abbildung 3 mitgeteilt sind. Die größte Dicke beträgt $t/l = 0{,}124$ und befindet sich an der Stelle $\xi_t/l = 0{,}4$. Im Bereich der Hinterkante ergeben sich schwache negative Werte, was bedeutet, daß die vorgegebene Geschwindigkeitsverteilung in diesem Bereich nicht erreichbar ist. Wir ändern daher die Kontur an der Hinterkante etwas ab, so daß nur positive Werte für $\bar{y}^{(t)}$ auftreten.

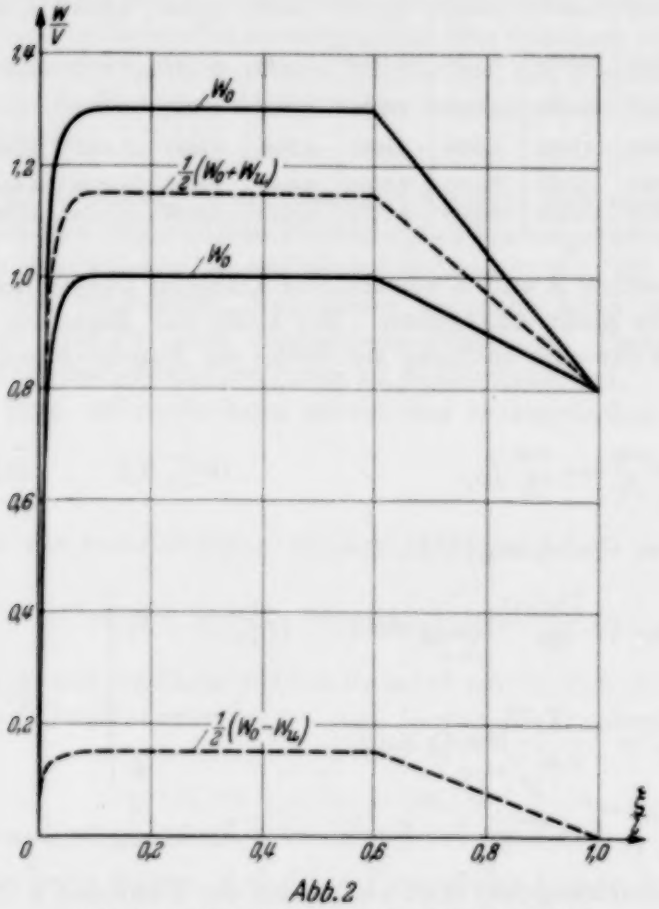


Abb. 2

Abb. 2. Geschwindigkeitsverteilung zum Beispiel 5 f.

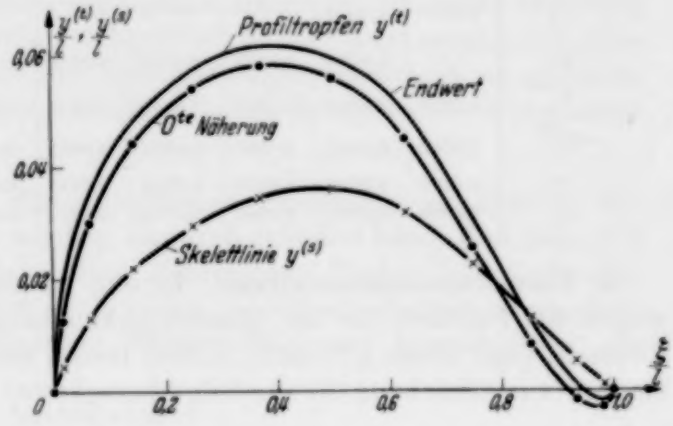


Abb. 3. Profiltropfen und Skelettlinie zum Beispiel 5 f.

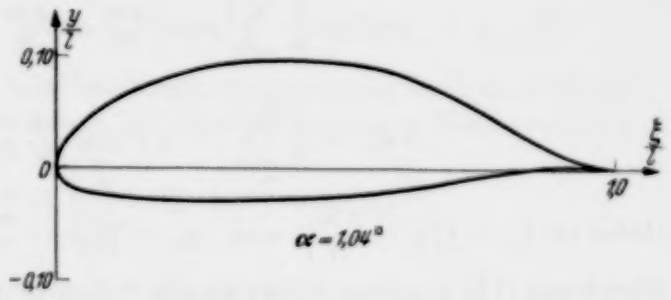


Abb. 4. Profilkörper zum Beispiel 5 f.

Interessant ist noch das Ergebnis, das sich ergibt, wenn wir nur die nullte Näherung für f berücksichtigen. Mit Hilfe von Gleichung (16) finden wir unmittelbar die Profilordinaten der nullten Näherung, wenn wir setzen $f_m \equiv f_m^{(0)}$. Wie aus der Tabelle und Abbildung 3 ersichtlich, ist der Unterschied gegenüber der letzten Näherung nicht sehr groß, so daß für rohe Überschlagsrechnungen mit Gleichung (16) gerechnet werden kann. Wenn die vorgegebene Geschwindigkeitsverteilung nicht gar zu ungewöhnlich ist, sind die Ordinaten der nullten Näherung immer etwas kleiner als diejenigen der endgültigen Rechnung.

Ausgehend von der Gleichung (35a) berechnen wir g_m. Den Faktor $\varkappa_m$ entnehmen wir der letzten Näherung für die Berechnung des Profiltropfens. Wir setzen g_m in Gleichung (29) ein und erhalten die Ordinaten der Skelettlinie $\bar{y}^{(s)}$. Siehe Tabelle 7 und Abb. 3. Die größte Wölbungshöhe beträgt $f/l = 0{,}036$ und befindet sich an der Stelle $\xi_f/l = 0{,}5$. Gleichung (28) liefert den Anstellwinkel zu $\alpha^{(s)} = 0{,}0205$ (=) $1{,}17°$.

Den endgültigen Anstellwinkel erhalten wir nach Gleichung (43) zu $\alpha = \dfrac{0{,}0205}{1{,}1244} = 0{,}0182\,(=)1{,}04°$. Die zusätzliche Skelettlinienänderung $\Delta\bar{y}^{(s)}$ bestimmen wir aus Gleichung (45). Wie aus Tabelle 7 hervorgeht, ist diese verschwindend klein. Gemäß Gleichung (46) haben wir die Ordinaten auf Ober- und Unterseite bestimmt. Abb. 4 zeigt den gesuchten unsymmetrischen Profilkörper.

Tabelle 7. *Zum Beispiel 5f. (Vgl. Abbildung 2 bis 4)*

$n,\ m$		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
W_o/V		0,8000	0,8213	0,8837	0,9831	1,1125	1,2632	1,3000	1,0300	1,3000	1,3000	1,2870	1,1050	0,0000
W_u/V		0,8000	0,8085	0,8335	0,8728	0,9250	0,9853	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9900	0,8500	0,0000
$f_m^{(0)}$		—	−0,1851	−0,1414	−0,0721	0,0187	0,1243	0,1500	0,1500	0,1500	0,1500	0,1385	−0,0225	—
f_m		—	−0,1850	−0,1366	−0,0603	0,0352	0,1239	0,1509	0,1503	0,1521	0,1578	0,1723	0,1085	—
$\varkappa_m$		—	1,0020	1,0056	1,0127	1,0162	1,0077	1,0008	1,0003	1,0018	1,0068	1,0297	1,1340	—
$\bar{y}'_n$	$p=0$	—	−0,0061	—	0,0315	—	0,0632	—	−0,0036	—	−0,0439	—	−0,0611	—
	1	—	—	0,0259	—	0,0791	—	0,0195	—	−0,0264	—	−0,0634	—	—
	2	—	−0,0023	—	0,0567	—	0,0598	—	−0,0036	—	−0,0408	—	−0,0698	—
	3	—	—	0,0265	—	0,0784	—	0,0198	—	−0,0263	—	−0,0614	—	—
	4	—	−0,0023	—	0,0565	—	0,0599	—	−0,0036	—	−0,0411	—	−0,0693	—
	5	−0,0115	—	0,0264	—	0,0784	—	0,0198	—	−0,0262	—	−0,0616	—	−0,0622
$\bar{y}_n^{(t)}$		0,0000	−0,0021	0,0010	0,0120	0,0306	0,0500	0,0594	0,0615	0,0574	0,0486	0,0352	0,0178	0,0000
$\bar{y}_n^{(0)}$		0,0000	−0,0031	−0,0014	0,0082	0,0254	0,0450	0,0560	0,0581	0,0539	0,0444	0,0302	0,0124	0,0000
g_m		—	0,0064	0,0252	0,0558	0,0952	0,1400	0,1501	0,1500	0,1503	0,1510	0,1529	0,1446	—
$\bar{y}_n^{(s)}$		0,0000	0,0013	0,0055	0,0130	0,0227	0,0319	0,0358	0,0346	0,0296	0,0220	0,0131	0,0046	—
$\Delta\bar{y}_n^{(s)}$		0,0000	0,0001	0,0002	0,0002	0,0002	0,0001	0,0001	0,0000	−0,0001	−0,0002	−0,0003	−0,0002	0,0000
$\bar{y}_o$		0,0000	−0,0007	0,0066	0,0252	0,0535	0,0820	0,0953	0,0961	0,0869	0,0698	0,0480	0,0222	0,0000
$\bar{y}_u$		0,0000	0,0035	0,0046	0,0012	−0,0077	−0,0180	−0,0235	−0,0269	−0,0279	−0,0274	−0,0224	−0,0134	0,0000

6. Formelzusammenstellung. In den Abschnitten **2** und **3** wurden der klareren Darstellung wegen die Formeln für die Quadraturkonstanten nicht angegeben. Mit Hilfe der *Bessel*schen Formeln (vgl. *Hütte*, 27. Aufl., S. 208) lassen sich für eine endliche sin-Reihe die *Fourier*-Koeffizienten aus Gleichung (5) wie folgt berechnen:

$$\nu b_\nu = \frac{2}{N}\sum_{m=1}^{N-1} \sin \nu\frac{\pi m}{N} \sin\frac{\pi m}{N} f_m\,, \qquad (\nu \leq N). \tag{62}$$

Entsprechend gilt für die endliche cos-Reihe aus Gleichung (21):

$$\left.\begin{aligned} \nu a_\nu^* &= \frac{2}{N}\sum_{m=1}^{N-1} \cos\nu\frac{\pi m}{N} \sin\frac{\pi m}{N} g_m + \frac{(-1)^\nu}{N}\lim_{\varphi\to\pi}(g\sin\varphi) \quad (\nu \leq N-1),\\ N a_N^* &= \frac{1}{N}\sum_{m=1}^{N-1}(-1)^m \sin\frac{\pi m}{N} g_m + \frac{(-1)^N}{2N}\lim_{\varphi\to\pi}(g\sin\varphi)\,. \end{aligned}\right\} \tag{63}$$

Dabei ist $f_m = f\left(\varphi = \frac{\pi m}{N}\right)$ und $g_m = g\left(\varphi = \frac{\pi m}{N}\right)$. Die Lage der Punkte in x-Richtung ist durch Gleichung (11) gegeben. Das zweite Glied in Gleichung (63) tritt auf, wenn die Funktion g für $\varphi \to \pi$ (Vorderkante) gegen unendlich geht. Werden die Gleichungen (62) und (63) sinngemäß in die Beziehungen der Abschnitte **2** und **3** eingesetzt, dann ergeben sich daraus nach einigen Zwischenrechnungen die Quadraturkonstanten in den Gleichungen (10), (16), (27), (28), (29) und (30) wie folgt:

$$\left.\begin{matrix} a_{mn} \\ c_{mn} \end{matrix}\right\} = \frac{1-(-1)^{m+n}}{4N} \sin\frac{\pi m}{N}\left(\operatorname{ctg}\frac{\pi(m-n)}{2N} \pm \operatorname{ctg}\frac{\pi(m+n)}{2N}\right),$$

$$a_{nn} = c_{nn} = 0\,, \qquad c_{Nn} = \frac{1-(-1)^{N+n}}{4N}\operatorname{tg}\frac{\pi n}{2N}\,. \tag{64}$$

$$b_{mn} = \frac{\sin\frac{\pi m}{N}}{2N}\sum_{\nu=1}^{N-1}\frac{1}{\nu}\left(\cos\nu\frac{\pi(m-n)}{N} - \cos\nu\frac{\pi(m+n)}{N}\right). \tag{65}$$

$$d_{mn}^* = \frac{\sin\frac{\pi m}{N}}{2N}\left(\sum_{\nu=1}^{N-1}\frac{1}{\nu}\left(\cos\nu\frac{\pi(m-n)}{N} + \cos\nu\frac{\pi(m+n)}{N}\right) + \frac{(-1)^{m+n}}{N}\right),$$

$$d_{Nn}^* = \frac{1}{2N}\left(\sum_{\nu=1}^{N-1}\frac{(-1)^\nu}{\nu}\cos\nu\frac{\pi n}{N} + \frac{(-1)^{N+n}}{2N}\right). \tag{66}$$

Mit Hilfe dieser Formeln berechnet sich weiterhin

$$d_m = d^*_{mN} - d^*_{m0} \tag{67}$$

und

$$d_{mn} = d^*_{mn} - \frac{1}{2}\left(d^*_{mN} + d^*_{m0}\right) + \frac{1}{2}\cos\frac{\pi n}{N}\left(d^*_{mN} - d^*_{m0}\right). \tag{68}$$

Für die in den Gleichungen (14) und (45) auftretenden Konstanten gilt:

$$a_m = \frac{1}{2}\sin\frac{\pi m}{N}, \qquad p_n = \operatorname{tg}\frac{\pi n}{2N}, \qquad q_n = 1 - \cos\frac{\pi n}{N}. \tag{69}$$

Sämtliche Konstanten wurden für $N = 12$ berechnet. Ihre Zahlenwerte sind in den Tabellen 1 bis 5 mitgeteilt.

7. Zusammenfassung. Es wird ein Verfahren zur Berechnung der Profilform (Profiltropfen, Skelettlinie und dazugehöriger Anstellwinkel) aus einer vorgegebenen Geschwindigkeitsverteilung an der Profiloberfläche mitgeteilt. Das Problem wird zurückgeführt auf die Auswertung einfacher Summenformeln, in denen jeweils nur die Produkte des Geschwindigkeitsbetrages an gewissen festen Stellen der Sehnenachse mit gewissen festen ein für allemal berechneten Konstanten auftreten.

8. Nachtrag. Aus Abschnitt 4 folgt, daß man die zusätzlichen Strömungsverhältnisse, die durch den angestellten Profiltropfen hervorgerufen werden, dadurch erfassen kann, daß man sich eine äquivalente Anstellwinkeländerung, Gl. (42), und eine äquivalente Skelettlinienänderung, Gl. (44), berechnet. Von dieser Tatsache kann man auch recht vorteilhaft Gebrauch machen, wenn man für eine vorgegebene Profilform (Profiltropfen, Skelettklinie und Anstellwinkel) die Geschwindigkeitsverteilung zu bestimmen hat.

Man ermittelt dann zuerst den rechnerischen Anstellwinkel

$$\bar{\alpha} = \left(1 - \frac{2}{l}\frac{dy^{(t)}}{d\tau}(\tau)\right)\alpha$$

und die rechnerischen Skelettordinaten

$$\bar{y}^{(s)} = y^{(s)} + \alpha\,(1 - \cos\varphi)\left(\frac{y^{(t)}}{\sin\varphi} + \frac{dy^{(t)}}{d\varphi}(\tau)\right) \quad \text{bzw.} \quad \bar{y}^{(s)}_m = y^{(s)}_m + \alpha\left(p_m\, y^{(t)}_m + q_m\, y^{(t)'}_N\right).$$

Bei Annahme kleiner Anstellwinkel würde sich die Geschwindigkeitsverteilung nach dem *Riegel*schen Quadraturverfahren (vgl. hierzu *E. Truckenbrodt*[1], S. 326) dann folgendermaßen berechnen:

$$\frac{W}{V}(\xi_n) = \frac{1}{\sqrt{c_n + y'^2_n}}\left[|a_n| + \sum_{m=1}^{N-1} A_{mn}\, 2\, y^{(t)}_m \pm \left(\sum_{m=1}^{N-1} C^*_{mn}\, 2\, \bar{y}^{(s)}_m + \alpha\,|b_n|\right)\right].$$

Man kann zeigen, daß diese Formel der bisher angewandten identisch ist.

(Eingegangen am 11. April 1951.)

Anschrift des Verfassers: Dr.-Ing. *E. Truckenbrodt*, (20b) Braunschweig, Körnerstraße 12.

[1] Fußnote 2 auf S. 1.

Tragwerksauslenkung unter bewegter Last.

Von E. Pestel.

1. Aufgabe und Voraussetzungen. Über das Thema dieser Arbeit liegen bereits viele Veröffentlichungen vor. Mit Rücksicht auf die zahlreichen Literaturhinweise in den Arbeiten von *Steuding*[1] und *Ödman*[2] kann auf eine Erörterung früherer Untersuchungen, die das gleiche Problem oder ähnliche Aufgaben behandeln, verzichtet werden, zumal in dem vorliegenden Aufsatz nicht an bekannte Darstellungsweisen angeknüpft wird. Hier werden zunächst grundsätzliche Fragen bei der Formulierung des Problems erörtert und danach die Entwicklung eines Berechnungsverfahrens erläutert, das im wesentlichen eine Ausarbeitung des in der Dissertation[3] des Verfassers nur andeutungsweise erwähnten „zweiten" Verfahrens darstellt.

Wir untersuchen die lotrechte Auslenkung eines Tragwerks, über das ein Massenpunkt und eine Anzahl von lotrecht gerichteten Kräften, die auch zeitlich veränderlich sein mögen, mit beliebiger Geschwindigkeit wandern. Dabei beschränken wir unsere Betrachtung auf waagerecht gelagerte Balken-Tragwerke, deren elastisches Verhalten unter den Voraussetzungen der *Navier*schen Biegetheorie bestimmt werden kann. Nebeneinflüsse, wie z. B. rotatorische Trägheit des Tragwerks, Wirkung der Schubkräfte, Reibungseinflüsse usw., werden vernachlässigt. Der Massenpunkt ist bei seiner Wanderung über das Tragwerk stets in unelastischer Berührung mit der Fahrbahn des Tragwerks.

Es ist grundsätzlich möglich, mit Hilfe der vorgelegten Methode auch Tragwerke von komplizierterem Aufbau (z. B. Hängebrücken) zu behandeln und die hier vernachlässigten Nebeneinflüsse zu berücksichtigen.

2. Formulierung des Problems. Der wandernde Massenpunkt (Masse M) habe die Stelle i (Laststellung in i) erreicht. Die zu diesem Zeitpunkt t_i vorhandene Auslenkung des Trägers drücken wir wie folgt aus:

$$y_i = \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{q_{ni}(t_i)}_{\text{Zeitfunktion}} \underbrace{\varphi_{ni}(x)}_{\text{Formfunktion}}. \tag{2.1}$$

Damit sind bei Laststellung in i folgende Kräfte am Träger wirksam:

a) Die Trägheitskräfte der Trägermasse $m(x)$ infolge Auslenkung des Trägers[4]:

$$-\int_B m \sum_{n=1}^{\infty} \ddot{q}_{ni}\, \varphi_{ni}\, dx.$$

b) Die Trägheitskräfte des wandernden Massenpunktes M infolge Auslenkung des Trägers:

$$-M \sum_{n=1}^{\infty} (\ddot{q}_{ni}\, \varphi_{ni} + 2c\, \dot{q}_{ni}\, \varphi'_{ni} + c^2\, q_{ni}\, \varphi''_{ni} + q_{ni}\, \varphi'_{ni}\, \ddot{x})_{x_i}.$$

Hier wird auch die Formfunktion φ_{ni} nach t differenziert, da die Koordinate x_i des wandernden Massenpunktes von t abhängt ($dx_i/dt = c_i$ = Lastgeschwindigkeit).

c) Die Trägheitskräfte des wandernden Massenpunktes M infolge vorhandener Abweichungen $\psi(x)$ der Fahrbahn von der Waagerechten (z. B. Unebenheiten, Überhöhung usw.; $\psi'(x)$ wird als stetig in B einschließlich seiner Grenzen vorausgesetzt):

$$-M\,(c^2\psi'' + \psi'\,\ddot{x})_{x_i}.$$

---

[1] *H. Steuding*, Ing.-Arch. 5 (1934) S. 275.

[2] *S. T. A. Ödman*, Differential Equation for Calculation of Vibrations Produced in Load-bearing Structures by Moving Loads. Preliminary Publications. International Association for Bridge and Structural Engineering. 3rd Congress Liège 13.—18. 9. 1948.

[3] *E. Pestel*, Ein strenges allgemeines Verfahren zur Berechnung von Trägerschwingungen unter wandernden Lasten. Dissertation Hannover 1947.

[4] Der Buchstabe „B" am Integralzeichen bedeutet, daß über den gesamten Bereich des Trägers zu integrieren ist. Punkte bzw. Striche bedeuten partielle Ableitung nach der Zeit t bzw. nach der Ortskoordinate x.

d) Die elastischen Rückstellkräfte:

$$-\int_B \sum_{n=1}^{\infty} q_{ni}\,(EJ\varphi''_{ni})''\,dx.$$

e) Äußere, auch zeitlich veränderliche Kräfte (z. B. unausgeglichene Fliehkräfte von Fahrzeugen usw. einschließlich des Gewichtes P des Massenpunktes M). Die Angriffspunkte x_p der wandernden Kräfte stehen zu jedem Zeitpunkt in eindeutiger Beziehung zu der Stellung des Massenpunktes in x_i:

$$P + P_p(t_i).$$

Wir variieren den Auslenkungszustand des Trägers bei Laststellung in i längs der Formfunktion $\varphi_{ni}(x)$. Dabei leisten die vorgenannten Kräfte folgende Arbeiten:

$$-\delta q_{ni}\int_B m\,\varphi_{ni}\sum_{n=1}^{\infty}\ddot{q}_{ni}\,\varphi_{ni}\,dx\,,$$

$$-\delta q_{ni}\,\varphi_{ni}\,(x_i)\,M\sum_{n=1}^{\infty}(\ddot{q}_{ni}\,\varphi_{ni}+2\,c\,\ddot{q}_{ni}\,\varphi'_{ni}+c^2\,q_{ni}\,\varphi''_{ni}+q_{ni}\,\varphi'_{ni}\,\ddot{x})_{x_i}\,,$$

$$-\delta q_{ni}\,\varphi_{ni}\,(x_i)\,M\,(c^2\psi''+\psi'\ddot{x})_{x_i}\,,$$

$$-\delta q_{ni}\int_B \varphi_{ni}\sum_{n=1}^{\infty} q_{ni}\,(EJ\varphi''_{ni})''\,dx,$$

$$\delta q_{ni}\,[\varphi_{ni}(x_i)\,P+\sum_P \varphi_{ni}\,(x_p)\,P_p(t_i)].$$

Bevor wir zur Aufstellung der Differentialgleichungen weiterschreiten, wollen wir aus der unendlich großen Menge zulässiger Formfunktionen $\varphi_{ni}\,(x)$ zwei auswählen, die für die Lösung des Problems bei dem gewählten Ansatz (2.1) geeignet erscheinen.

1. Eigenschwingungsformen des unbelasteten Trägers. Formfunktionen φ_{ni}, die den Eigenschwingungsformen des unbelasteten Trägers entsprechen, sind nicht mehr von der Laststellung i abhängig, so daß man unter Fortlassung des Index i einfach φ_n schreiben kann. Ferner bestehen folgende Orthogonalitätsbeziehungen:

$$\left.\begin{aligned}&\int_B m\,\varphi_n\,\varphi_l\,dx=0\,,\\&\int_B \varphi_n\,(EJ\,\varphi''_l)''\,dx=0\end{aligned}\right\}\ \text{für}\ n\neq l\,.$$

Weiterhin sollen die Formfunktionen wie folgt normiert sein:

$$\int_B m\cdot\varphi_n^2\,dx=1\,.$$

Indem wir den *Rayleigh*quotienten

$$\frac{\int_B \varphi_n\,(EJ\varphi''_n)''\,dx}{\int_B m\,\varphi_n^2\,dx}=\omega_n^2$$

setzen, erhalten wir durch Gleichsetzung der virtuellen Arbeit der Trägheitskräfte und der elastischen Kräfte einerseits und der äußeren Kräfte andererseits folgendes System von unendlich vielen gekoppelten Differentialgleichungen:

$$\left.\begin{aligned}&\ddot{q}_{ni}+\omega_n^2\,q_{ni}=\sum_P \varphi_n\,(x_p)\cdot P_p\,(t_i)+\varphi_n\,(x_i)\times\\&\times\left\{P-M\left[(c^2\psi''+\psi'\ddot{x})_{x_i}+\sum_{n=1}^{\infty}(\ddot{q}_{ni}\,\varphi_n+2\,c\,\dot{q}_{ni}\,\varphi'_n+c^2\,q_{ni}\,\varphi''_n+q_{ni}\,\varphi'_n\,\ddot{x})_{x_i}\right]\right\}\ (n=1,2,3,\ldots.)\end{aligned}\right\}\quad(2.2)$$

2. Eigenschwingungsformen des Systems bestehend aus Träger und wanderndem Massenpunkt M. Wir wollen nun die Eigenschwingungsformen des Systems bestehend aus Träger und wanderndem Massenpunkt als Formfunktionen φ_{ni} wählen. Dann sind die Formfunktionen nicht mehr von der Laststellung i unabhängig. Sie gehorchen folgenden Ortho-

gonalitätsbedingungen:

$$\left.\begin{aligned} &\int_B m\,\varphi_{ni}\,\varphi_{li}\,dx + M\,\varphi_{ni}\,(x_i)\,\varphi_{li}\,(x_i) = 0, \\ &\int_B \varphi_{ni}\,(EJ\,\varphi_{li}'')''\,dx = 0 \end{aligned}\right\} \text{ für } n \neq l\,.$$

Wie zuvor seien die Formfunktionen normiert gemäß

$$\int_B m\,\varphi_{ni}^2\,dx + M\,\varphi_{ni}^2\,(x_i) = 1\,.$$

Mit dem *Rayleigh*quotienten

$$\frac{\int_B \varphi_{ni}\,(EJ\,\varphi_{ni}'')''\,dx}{\int_B m\,\varphi_{ni}^2\,dx + M\,\varphi_{ni}^2\,(x_i)} = \omega_{ni}^2$$

erhalten wir, ähnlich wie unter 1., folgendes System von gekoppelten Differentialgleichungen:

$$\left.\begin{aligned} &\ddot{q}_{ni} + \omega_{ni}^2\,q_{ni} = \sum_P \varphi_{ni}\,(x_p)\,P_p\,(t_i) + \varphi_{ni}\,(x_i)\times \\ &\times\left\{P - M\left[(c^2\,\psi'' + \psi'\ddot{x})_{x_i} + \sum_{n=1}^{\infty}(2\,c\,\dot{q}_{ni}\,\varphi_{ni}' + c^2\,q_{ni}\,\varphi_{ni}'' + q_{ni}\,\varphi_{ni}'\ddot{x})_{x_i}\right]\right\}(n = 1, 2, 3, \ldots)\,. \end{aligned}\right\} \quad (2.3)$$

3. Erörterung der Gleichungssysteme (2.2) und (2.3). Zum Zwecke der Unterscheidung wollen wir den Beschleunigungsarten des wandernden Massenpunktes folgende Bezeichnungen zuordnen:

$\ddot{q}_{ni}\,\varphi_{ni}\,(x_i)$.	$2\,c_i\,\dot{q}_{ni}\,\varphi_{ni}'\,(x_i)$.	$c_i^2\,q_{ni}\,\varphi_{ni}''\,(x_i)$.
Vertikalbeschleunigung	Coriolisbeschleunigung	Zentripetalbeschleunigung

Die Wahl der Formfunktion in **2** 2) hat zur Folge, daß die Vertikalbeschleunigung des Massenpunktes, die er mit dem Trägerelement an der Laststelle i gemeinsam hat, gegenüber der Coriolis- und der Zentripetalbeschleunigung eine ausgezeichnete Stellung einnimmt. Eine Entkopplung des Systems von Differentialgleichungen (2.3) wurde dadurch nicht erreicht. Diese scheitert, physikalisch gesehen, grundsätzlich daran, daß der wandernde Massenpunkt anderen Trägheitskräften unterworfen ist als die nur in lotrechter Richtung ausgelenkte Trägermasse, während vom mathematischen Standpunkt aus die tiefere Ursache darin zu suchen ist, daß die das Problem beschreibende partielle Differentialgleichung eine Übergangsbedingung an der Laststelle besitzt[1], welche die Auflösung der partiellen Differentialgleichung in ein System von entkoppelten gewöhnlichen Differentialgleichungen durch einen *Bernoulli*schen Ansatz entsprechend (2.1) vereitelt.

Die unterschiedliche Behandlung der Beschleunigungsarten des Massenpunktes infolge der speziellen Wahl der Formfunktion in **2** 2) bringt es ferner mit sich, daß die nach Fortlassung der Kopplungsglieder verbleibende Restgleichung von (2.3) Koeffizienten und Störungsglieder enthält, die im Gegensatz zu denen in der entsprechenden Restgleichung von (2.2) aus Formfunktionen berechnet werden müssen, die mit der Laststellung i veränderlich sind. Damit ist ein so erheblicher Rechenaufwand verbunden, daß die Lösung des vorgelegten Problems mit Hilfe von (2.3) nur dann ins Auge gefaßt werden sollte, wenn der Einfluß der Coriolis- und Zentripetalbeschleunigungen gegenüber dem der Vertikalbeschleunigung lediglich den Charakter einer Korrektur trägt, und man die Lösung bei $n = 1$ abbrechen kann. Ein derartiger Fall liegt z. B. vor, wenn die wandernde Lastmasse groß gegenüber der Trägermasse ist, der Träger jedoch die im Brückenbau übliche Biegesteifigkeit besitzt.

4. Verfahren zur Lösung des Systems (2.2)[2]. An Stelle des Gliedes

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\ddot{q}_{ni}\,\varphi_n + 2\,c\,\dot{q}_{ni}\,\varphi_n' + c^2\,q_{ni}\,\varphi_n'' + q_{ni}\,\varphi_n'\,\ddot{x})_{x_i}, \quad (4.a)^3$$

[1] Vgl. Gleichung (6) der Arbeit *Steuding*.

[2] Das Verfahren zur Lösung von (2.3) kann analog dem hier Vorgelegten entwickelt werden, so daß auf eine gesonderte Darstellung verzichtet werden kann.

[3] Die mit Buchstaben bezeichneten Gleichungen werden lediglich bei der Entwicklung des Lösungsverfahrens benutzt.

das in (2.2) erscheint, können wir schreiben:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{d^2}{dt^2} (q_{n\,i}\, \varphi_n)_{x_i}. \tag{4.b}$$

Der Zusammenhang dieser zwei gleichwertigen Schreibweisen läßt sich auch physikalisch deuten. Bei (4.a) registriert man als Beobachter auf dem in beschleunigter Bewegung befindlichen Massenpunkt die verschiedenen auf diesen einwirkenden Beschleunigungen, während man bei (4.b) von einem ruhenden Standpunkt aus das Durchlaufen der Bahn des Massenpunktes (Lastweg) beobachtet und aus der Krümmung des Lastweges (nicht zu verwechseln mit der Krümmung des Trägers!) und der Horizontalgeschwindigkeit des Massenpunktes die auf ihn wirkende Beschleunigung bestimmt.

Der kürzeren Schreibweise wegen fassen wir die aus der Fahrbahnabweichung von der Horizontalen resultierenden Trägheitskräfte

$$M (c^2 \psi'' + \psi' \ddot{x})_{x_i}$$

zu einer bei bekannter Geschwindigkeit c_i des Massenpunktes gegebenen äußeren Kraft B_i zusammen. Damit können wir (2.2) wie folgt schreiben:

$$\ddot{q}_{n\,i} + \omega_n^2 q_{n\,i} = \sum_p \varphi_n (x_p) P_p (t_i) + \varphi_n (x_i) \left[P - B_i - M \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d^2}{dt^2} (q_{n\,i}\, \varphi_n)_{x_i} \right] (n = 1, 2, 3, \ldots). \tag{4.1}$$

Wir wollen das System (4.1) so lösen, daß wir den wandernden Massenpunkt M schrittweise auf seinem Wege über den Träger verfolgen. Der Massenpunkt habe zur Zeit t_{i-1} die Stelle $i-1$ erreicht und der Träger besitze an dieser Stelle die Vertikalauslenkung:

$$y_{i-1} (x_{i-1}) = \sum_{n=1}^{\infty} q_{n,\,i-1}\, \varphi_n (x_{i-1})$$

und die Vertikalauslenkungsgeschwindigkeit:

$$\dot{y}_{i-1} (x_{i-1}) = \sum_{n=1}^{\infty} \dot{q}_{n,\,i-1}\, \varphi_n (x_{i-1}).$$

Damit finden wir, indem zunächst der Einfluß der Massenkräfte des wandernden Massenpunktes unberücksichtigt gelassen wird, die Auslenkung und Auslenkungsgeschwindigkeit des Trägers an der Stelle i zur Zeit t_i auf elementarem Wege[1] zu

$$[y_i (x_i)]_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n (x_i) \left[q_{n,\,i-1} \cos \omega_n (t_i - t_{i-1}) + \dot{q}_{n,\,i-1} \frac{\sin \omega_n (t_i - t_{i-1})}{\omega_n} + \frac{\Phi_n (t_i)}{\omega_n} + \frac{\Psi_n (t_i)}{\omega_n} \right], \tag{4.2}$$

$$\left.\begin{aligned} [\dot{y}_i (x_i)]_1 = {} & \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n (x_i) \times \\ & \times \left[- \omega_n\, q_{n,\,i-1} \sin \omega_n (t_i - t_{i-1}) + \dot{q}_{n,\,i-1} \cos \omega_n (t_i - t_{i-1}) + \frac{\left(\frac{d\Phi_n}{dt}\right)_{t_i}}{\omega_n} + \frac{\left(\frac{d\Psi_n}{dt}\right)_{t_i}}{\omega_n} \right] \end{aligned}\right\} \tag{4.3}$$

mit

$$\Phi_n (t_i) = \sum_p \int_0^{t_i - t_{i-1} = \Delta t_i} P_p (t_{i-1} + t)\, \varphi_n (x_{p-1} + c\, t) \sin \omega_n (\Delta t_i - t)\, dt + \int_0^{\Delta t_i} B (t_{i-1} + t)\, \varphi_n (x_{i-1} + c\, t) \sin \omega_n (\Delta t_i - t)\, dt\,,$$

$$\Psi_n (t_i) = \int_0^{\Delta t_i} P\, \varphi_n (x_{i-1} + c\, t) \sin \omega_n (\Delta t_i - t)\, dt\,.$$

Der Index 1 bei $[y_i (x_i)]_1$ und $[\dot{y}_i (x_i)]_1$ besagt, daß es sich um erste Näherungen handelt, da in $\Psi_n (t_i)$ der Einfluß der Massenkräfte des wandernden Massenpunktes unberücksichtigt blieb.

Wir wollen uns nun aufeinanderfolgende Punkte des Lastweges, gegeben durch ihre Abszissen x_{i-1} bzw. x_i und ihre Ordinaten y_{i-1} bzw. y_i, durch eine kubische Parabel verbunden

[1] *K. Klotter*, Einführung in die Technische Schwingungslehre, 2. Aufl., Bd. 1, S. 173 ff. Berlin, Göttingen, Heidelberg 1951.

denken, deren Tangentenrichtung an der Stelle $i-1$ bzw. i mit der Richtung der Vektorsumme aus Horizontalgeschwindigkeit c_{i-1} bzw. c_i und der vertikalen Auslenkungsgeschwindigkeit $\dot{y}_{i-1}(x_{i-1})$ bzw. $\dot{y}_i(x_i)$ zusammenfällt. Eine einfache Zwischenrechnung ergibt dann als erste Näherung der Lastwegsbeschleunigung in der Intervallmitte[1]:

$$[\ddot{y}_i(x_i)]_1 = \left(\frac{c_i + c_{i-1}}{2}\right)^2 \left\{ \frac{[\dot{y}_i(x_i)]_1}{c_i(x_i - x_{i-1})} - \frac{\dot{y}_{i-1}(x_{i-1})}{c_{i-1}(x_i - x_{i-1})} \right\} + \\ + (\ddot{x})_{\frac{x_{i-1}+x_i}{2}} \left(\frac{3}{2} \left| \frac{[y_i(x_i)]_1 - y_{i-1}(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}} \right| - \frac{1}{4} \left| \frac{[\dot{y}_i(x_i)]_1}{c_i} + \frac{\dot{y}_{i-1}(x_{i-1})}{c_{i-1}} \right| \right). \tag{4.c}$$

Dies vereinfacht sich, wenn wir im folgenden die Horizontalgeschwindigkeit des Massenpunktes als konstant betrachten, zu

$$[\ddot{y}_i(x_i)]_1 = \frac{[\dot{y}_i(x_i)]_1 - \dot{y}_{i-1}(x_{i-1})}{\Delta t_i}. \tag{4.d}$$

Mit diesem Wert für die Lastwegsbeschleunigung können wir den Term für die Massenkräfte des wandernden Massenpunktes in (4.1) berechnen und somit zweite Näherungen für die Auslenkung und Auslenkungsgeschwindigkeit des Trägers an der Stelle i zur Zeit t_i entsprechend den Gl. (4.2) und (4.3) ermitteln.

Bevor wir den Iterationsprozeß einleiten, wollen wir in (4.d) in Hinblick auf (4.3) die Anteile abspalten, die bei der Iteration unverändert bleiben. Dies sind zunächst die beiden ersten Glieder in (4.3) und $\dot{y}_{i-1}(x_{i-1})$, da sie nur Größen enthalten, die durch die vorangegangenen Rechenschritte bis zur Stelle $i-1$ bereits endgültig bestimmt worden sind; ferner gehört dazu der Term $(d\Phi_n/dt)_{t_i}/\omega_n$ in (4.3), der den Einfluß von Kräften wiedergibt, die von der Trägerbeschleunigung unabhängig sind. Wir fassen diese Anteile wie folgt zusammen:

$$V_i = \frac{\sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(x_i) \left\{ -\omega_n q_{n,i-1} \sin \omega_n \Delta t_i + \dot{q}_{n,i-1} \left[\cos \omega_n \Delta t_i - \frac{\varphi_n(x_{i-1})}{\varphi_n(x_i)} \right] + \left(\frac{d\Phi_n}{dt} \right)_{t_i} \Big/ \omega_n \right\}}{\Delta t_i}. \tag{4.4}$$

Für das Restglied in (4.3) $(d\Psi_n/dt)_{t_i}/\omega_n$ schreiben wir nach Division durch Δt_i die Abkürzung $[\ddot{y}_i(x_i)]_{1'}$ und können nun für die Lastwegsbeschleunigung erster Näherung schreiben:

$$[\ddot{y}_i(x_i)]_1 = V_i + [\ddot{y}_i(x_i)]_{1'}.$$

Indem wir die mit Hilfe von (4.4) erhaltene Massenkraft erster Näherung mit dem Gewicht $P = Mg$ des Massenpunktes zu einer „äußeren Kraft" $(P_i)_1$ erster Näherung

$$(P_i)_1 = P \left\{ 1 - \frac{V_i}{g} - \frac{[\ddot{y}_i(x_i)]_{1'}}{g} \right\}$$

vereinigen und $(P_i)_1$ anstelle von P einsetzen, erhalten wir als Lastwegsbeschleunigung zweiter Näherung während des i-ten Zeitintervalles:

$$[\ddot{y}_i(x_i)]_2 = V_i + \left\{ 1 - \frac{V_i}{g} - \frac{[\ddot{y}_i(x_i)]_{1'}}{g} \right\} [\ddot{y}_i(x_i)]_{1'} = \left\{ [\ddot{y}_i(x)_i]_{1'} + V_i \right\} \left\{ 1 - \frac{[\ddot{y}_i(x_i)]_{1'}}{g} \right\}.$$

Damit bestimmen wir, wie zuvor, eine „äußere Kraft" zweiter Näherung:

$$(P_i)_2 = P \left\{ 1 - \frac{[\ddot{y}_i(x_i)]_2}{g} \right\} = P \left\{ 1 - \frac{[\ddot{y}_i(x_i)]_{1'}}{g} + \frac{[\ddot{y}_i(x_i)]_{1'}^2}{g^2} - \frac{V_i}{g} \left(1 - \frac{[\ddot{y}_i(x_i)]_{1'}}{g} \right) \right\}.$$

Durch fortgesetzte Iteration erhalten wir als „äußere Kraft" m-ter Näherung:

$$(P_i)_m = P \left\{ \sum_{r=0}^{m} (-1)^r \left(\frac{[\ddot{y}_i(x_i)]_{1'}}{g} \right)^r - \frac{V_i}{g} \sum_{r=1}^{m} (-1)^{r-1} \left(\frac{[\ddot{y}_i(x_i)]_{1'}}{g} \right)^{r-1} \right\}.$$

Für $m \to \infty$ ergibt sich dann[2]:

$$P_i = \frac{P\left(1 - \frac{V_i}{g}\right)}{1 + \frac{[\ddot{y}_i(x_i)]_{1'}}{g}}. \tag{4.5}$$

[1] Die Bestimmung der Lastwegsbeschleunigung als Funktion von t im Intervall Δt_i bereitet grundsätzlich keine Schwierigkeiten; doch steht der geringe Gewinn an Rechengenauigkeit in keinem Verhältnis zu der sich dann ergebenden Vergrößerung des Rechenaufwandes.

[2] Siehe Fußnote 3 von S. 378.

Indem wir P_i anstelle von P in die Terme $\Psi_n(t_i)$ und $(d\Psi_n/dt)_{t_i}$ von (4.2) und (4.3) einsetzen, erhalten wir endgültige Werte für die Lastwegsordinate $y_i(x_i)$ und die lotrechte Lastwegsgeschwindigkeit $\dot{y}_i(x_i)$ am Ende des i-ten Zeitintervalles und können danach zur Berechnung der Stelle $i+1$ in der gleichen Weise fortschreiten.

5. Anwendung. Für die Behandlung eines bestimmten Problems sind lediglich die Ermittlung der Formfunktion φ_n, die Auswertung der Integrale Φ_n und Ψ_n, ihrer Ableitungen und die Aufstellung des Rechenschemas unter Benutzung von (4.2), (4.3), (4.4) und (4.5) zu erledigen. Die Berechnung von Beispielen zeigte, daß außer in der Umgebung stärkerer Lastwegskrümmung die Schrittweite $c_i\,\Delta t_i = x_i - x_{i-1}$ ziemlich groß gewählt werden kann. Einen Überblick verschafft man sich am besten durch eine mit wenigen großen Schritten durchgeführte Probeberechnung, die nur die Grundeigenfrequenz und -schwingungsform ($n=1$) berücksichtigt. Die Untersuchung eines extremen Beispiels (weicher Träger, große Lastmasse im Verhältnis zur Trägermasse und hohe Lastgeschwindigkeit), die unter Benutzung einer jeweils verschiedenen Anzahl von *Fourier*gliedern durchgeführt wurde, erwies eine Überschreitung von $n=3$ zur Erzielung ausreichender Genauigkeit als unnötig. Eigenschwingungsformen höherer Ordnung brauchen daher nur Berücksichtigung zu finden, wenn pulsierende Kräfte auf den Träger wirken, deren Frequenz in der näheren Umgebung einer der höheren Eigenfrequenzen des Trägers liegt. Die Anwendung des Verfahrens beantwortet gleichzeitig die für den Ingenieur wesentlichen Fragen nach der Trägerdurchbiegung und dem Querkraftsprung P_i an der Laststelle.

(Eingegangen am 20. April 1951.)

Anschrift des Verfassers: Dozent Dr.-Ing. *E. Pestel*, Hannover, Nienburger Straße 2.

Über den Einfluß der Absaugung auf die Lage der Umschlagstelle an Tragflügelprofilen.

Von H. Krüger.

1. Einleitung. Der Reibungswiderstand eines Tragflügels läßt sich durch Laminarhalten der Grenzschicht beträchtlich vermindern. Ein Mittel hierzu ist die Verwendung von Profilen mit großer Dickenrücklage. Bei diesen „Laminarprofilen" beginnt das den Umschlag laminar/turbulent begünstigende Druckanstiegsgebiet weit stromabwärts. Eine andere Möglichkeit, die Grenzschicht über große Laufstrecken laminar zu halten, bietet die Absaugung eines Teils der Grenzschichtsubstanz durch die poröse Körperoberfläche. Gleichzeitige Anwendung beider Maßnahmen ermöglicht weitgehendes Laminarhalten bei geringen Absaugmengen und -leistungen. Wie Profilgestaltung und Absaugung die Umschlagspunktlage beeinflussen, soll im folgenden an Hand theoretischer Untersuchungsergebnisse aufgezeigt werden.

2. Berechnungsgrundlagen. Ist für das angeströmte Profil (Abb. 1) der Verlauf der Außengeschwindigkeit U und der Sauggeschwindigkeit $-v_0$ über der Laufstrecke s vorgegeben, so läßt sich die laminare Grenzschicht nach einem von *H. Schlichting*[1] angegebenen Näherungsverfahren

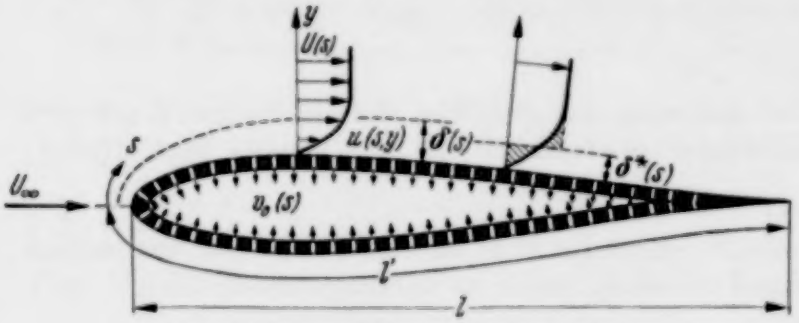


Abb. 1. Erläuterungsskizze für die Grenzschicht mit Absaugung.

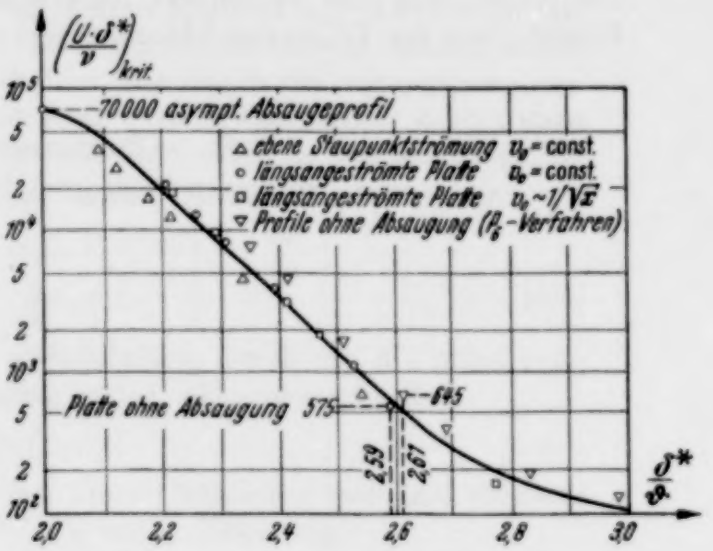


Abb. 2. Die kritische Reynoldssche Zahl $(U\,\delta^*/\nu)_{krit}$ in Abhängigkeit vom Formwert $\delta^*/\vartheta = H$.

berechnen. Zu jedem Punkt der laminaren Laufstrecke erhält man das „Geschwindigkeitsprofil" $u(y)$ der Grenzschicht, damit Verdrängungsdicke δ^* und Impulsverlustdicke ϑ [2]. Vom Quotienten $\delta^*/\vartheta = H$, dem „Formwert", hängt nun im wesentlichen die kritische Reynoldssche Zahl der Reibungsschicht $(U_0\,\delta^*/\nu)_{krit}$ ab, bei deren Erreichen die laminare Grenzschicht instabil wird, also Umschlag eintreten kann. Abb. 2 zeigt diese Abhängigkeit, wie sie *A. Ulrich* für die exakten Geschwindigkeitsprofile der abgesaugten Staupunkts- und Plattenströmung fand[3], und wie sie sich nach einem genügend genauen Näherungsverfahren[4] für nicht abgesaugte Körper ergibt. Den nachstehend beschriebenen Untersuchungen wurde eine eindeutige Zuordnung zwischen Formwert H und kritischer Re-Zahl $(U\cdot\delta^*/\nu)_{krit}$ entsprechend der ausgezogenen Kurve zugrundegelegt.

3. Rechnungsgang: Ergebnisse für Profile üblicher Form. Als Beispiel für Flügelschnitte der üblichen Form betrachten wir ein symmetrisches Joukowsky-Profil von 15% Dicke und 25 %

---

[1] *H. Schlichting*: Ein Näherungsverfahren zur Berechnung der laminaren Reibungsschicht mit Absaugung. Ing.-Archiv, XVI. Bd., 3. und 4. Heft, 1948.

[2] Es ist $\delta^* U = \int_{y=0}^{\infty} (U-u)\,dy$ (siehe Abb. 1), $\quad \vartheta U^2 = \int_{y=0}^{\infty} u\,(U-u)\,dy$.

[3] *A. Ulrich*: Theoretische Untersuchungen über die Widerstandsersparnis durch Laminarhaltung mit Absaugung. Schriften der Deutschen Akademie der Luftfahrtforschung, Band 8b, 1944, Heft 2.

[4] *H. Schlichting* und *A. Ulrich*: Zur Berechnung des Umschlages laminar/turbulent. Bericht S 10 der Lilienthal-Gesellschaft, 1940.

Dickenrücklage mit der potentialtheoretischen Geschwindigkeitsverteilung $U(s)$ bei symmetrischem Anstrom. Es liege homogene Absaugung vor, d. h. die Sauggeschwindigkeit $-v_0$ sei über der Lauflänge konstant. Für verschiedene *Re*-Zahlen $U_\infty \cdot l/\nu$ und Absaugestärken $-v_0/U_\infty \sqrt{U_\infty l/\nu}$ liefert die Grenzschichtrechnung die dimensionslose Verdrängungsdicke $U \cdot \delta^*/\nu$ über der Lauflänge s/l'. Die Auftragung in Abb. 3 (dünn ausgezogene Kurven) für $U_\infty l/\nu = 10^6$ und 10^8 zeigt, wie die Grenzschicht mit steigender Absaugung dünner wird. Mit Hilfe der Rechenkurve von Abb. 2 können weiterhin die kritischen *Re*-Zahlen der Grenzschicht $(U \cdot \delta^*/\nu)_{krit}$ über der Laufstrecke aufgezeichnet werden. Der Verlauf dieser „Stabilitätsgrenzen" — in Abb. 3 stark ausgezogen — wird von der Absaugestärke wesentlich beeinflußt. Bei kleinen Sauggeschwindigkeiten fallen die Stabilitätsgrenzen stetig ab; bei starker Absaugung bilden sie ein Minimum aus und steigen zum Flügelende hin an.

Der Schnitt der Kurven für kritische *Re*-Zahl und Verdrängungsdicke gibt die Lage der Instabilitätspunkte oder theoretischen Umschlagspunkte auf der Profilkontur an. Der tatsächliche Umschlag laminar/turbulent liegt gewöhnlich weiter stromabwärts; spätestens tritt er am Ablösungspunkt der laminaren Grenzschicht ein. Da die Verhältnisse an dieser Stelle durch das benutzte Näherungsverfahren nur ungenau wiedergegeben werden, wurde für die Eintragung der Ablösungspunkte in Abb. 3 ein exaktes Ablösungsprofil (nach *Hartree*) zugrundegelegt. (Die gestrichelte Fortsetzung des Grenzschichtverlaufes über die Ablösungspunkte hinaus entspricht dem Näherungsverfahren und hat nur rechnerische Bedeutung.)

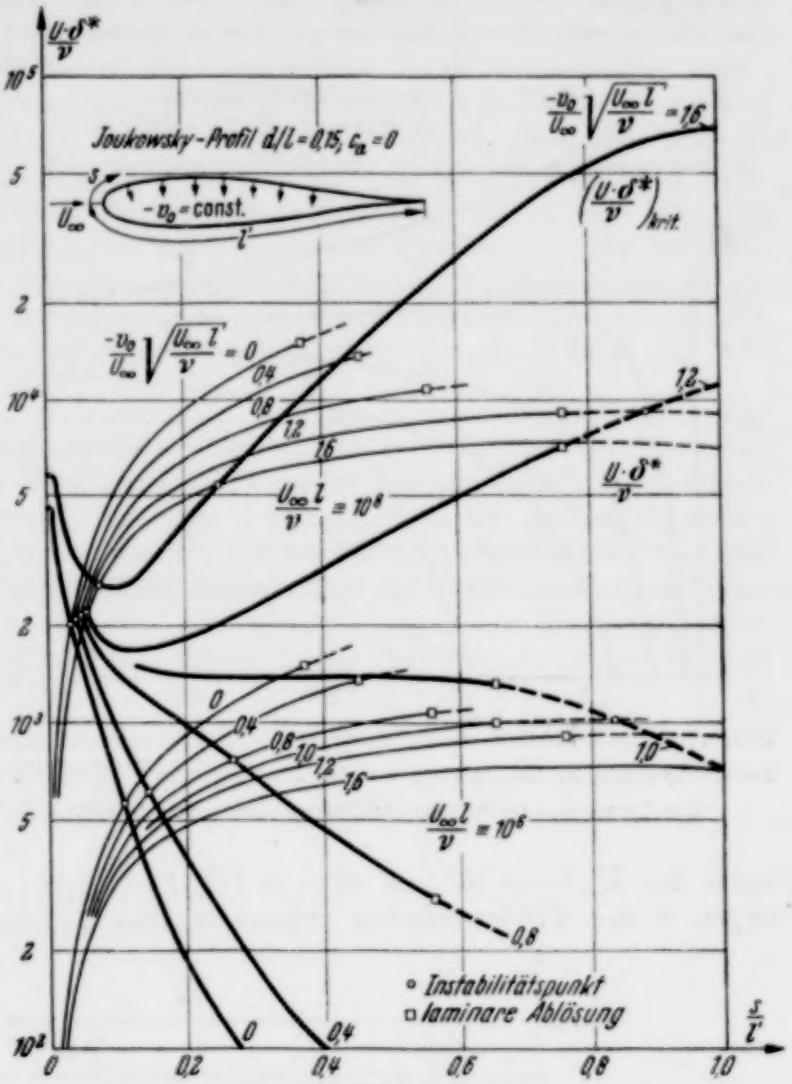


Abb. 3. Ermittlung der Instabilitätspunkte für ein symmetrisches Joukowsky-Profil mit homogener Absaugung.

Abb. 4 stellt den Zusammenhang zwischen Lage des Instabilitätspunktes und *Re*-Zahl $U_\infty l/\nu$ bei verschieden starker homogener Absaugung dar. Mit wachsenden *Re*-Zahlen rückt danach bei kleinen Absaugestärken der Umschlagspunkt stetig, bei großen sprungweise aus dem Ablösungsbereich

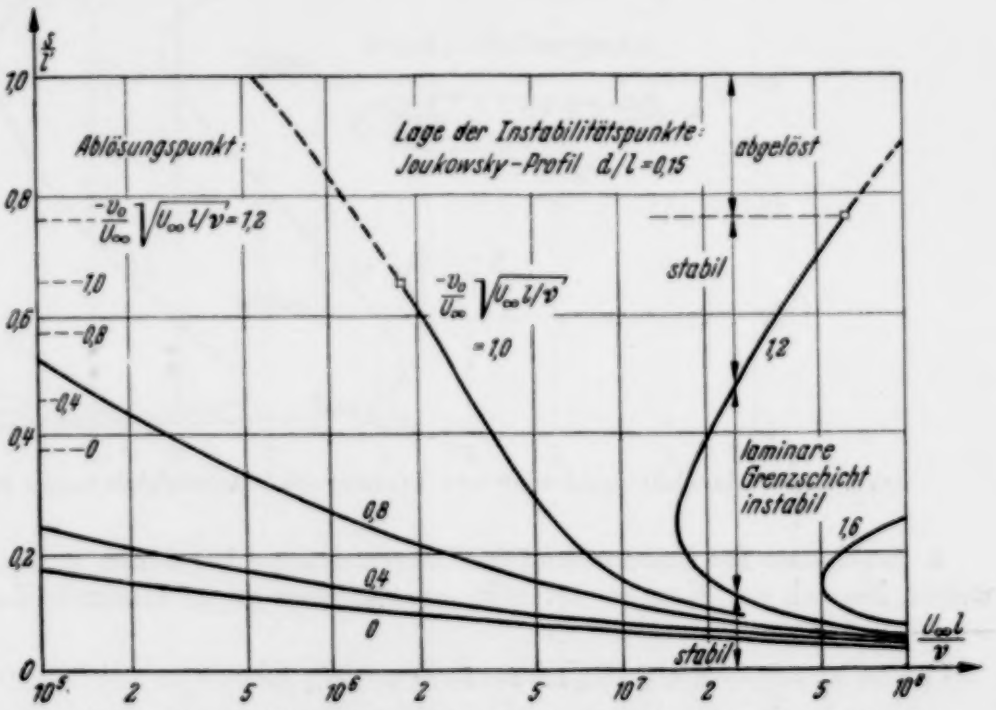


Abb. 4. Lage der Instabilitätspunkte s/l' beim symmetrischen Joukowsky-Profil in Abhängigkeit von der Reynoldsschen Zahl $U_\infty l/\nu$.

zur Profilnase. Bei großen Absaugestärken treten neben dem Ablösungspunkt zwei Instabilitätspunkte auf, zwischen denen die Grenzschicht zum Umschlag neigt.

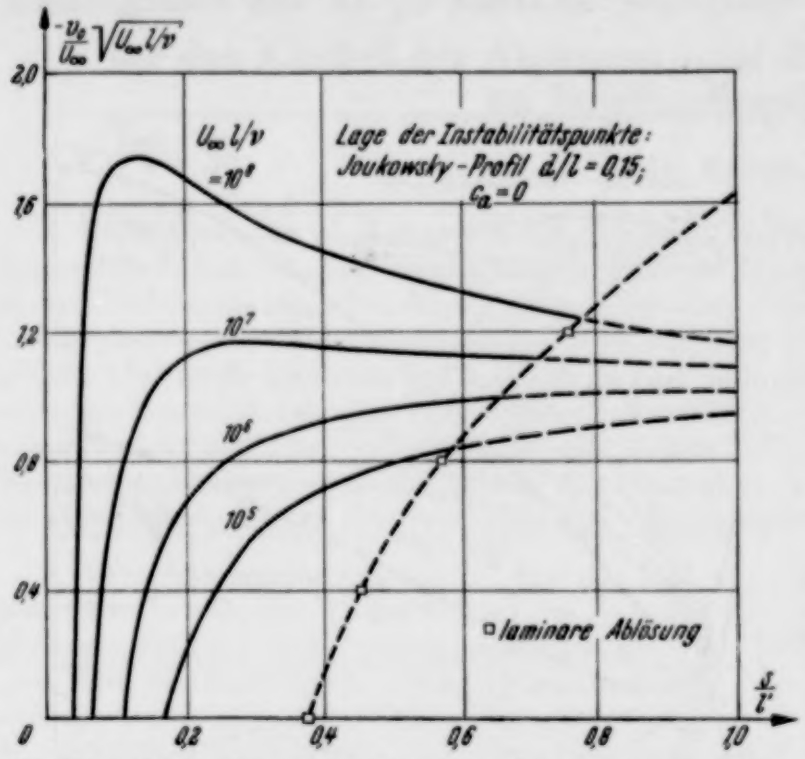


Abb. 5. Lage der Instabilitäts- und Ablösungspunkte s/l' beim symmetrischen Joukowsky-Profil in Abhängigkeit von der Absaugestärke $\frac{-v_0}{U_\infty}\sqrt{U_\infty\, l/\nu}$. (Die Kurven entsprechen der „optimalen Absaugeverteilung".)

Die Kurven der Abb. 5 zeigen die Ergebnisse der Abb. 4 in anderer Darstellung. Sie können angenähert als optimale Absaugeverteilungen betrachtet werden, bei denen die Grenzschichtdicke knapp unter der Stabilitätsgrenze bleibt, die also mit kleinstem Mengenaufwand den Umschlag verhindern. (Daß die Näherung gut ist, erwiesen genauere Ermittlungen, bei denen die Absaugung nicht jeweils konstant, sondern entsprechend der Optimalverteilung zugrundegelegt war.) Kleine *Re*-Zahlen $U_\infty\, l/\nu$ verlangen nach hinten zunehmende, große *Re*-Zahlen nach hinten fallende Absauggeschwindigkeiten. Bis zur Flügelhinterkante laminare Grenzschichten erhält man, wenn man der punktierten Verbindung der Ablösungspunkte gemäß nach hinten verstärkt absaugt.

Durch Integration der Optimalverteilung über der Flügelkontur erhalten wir deren Mengenbeiwert[1]. Um die Grenzschicht bis zur Hinterkante laminar zu halten, benötigt man beispielsweise bei $U_\infty\, l/\nu = 10^7$ ein $c_Q^* = c_Q\sqrt{U_\infty\, l/\nu} = 1{,}10$ entsprechend $c_Q = 3{,}5\cdot 10^{-4}$. Die Werte liegen in der Größenordnung experimenteller Ergebnisse[2].

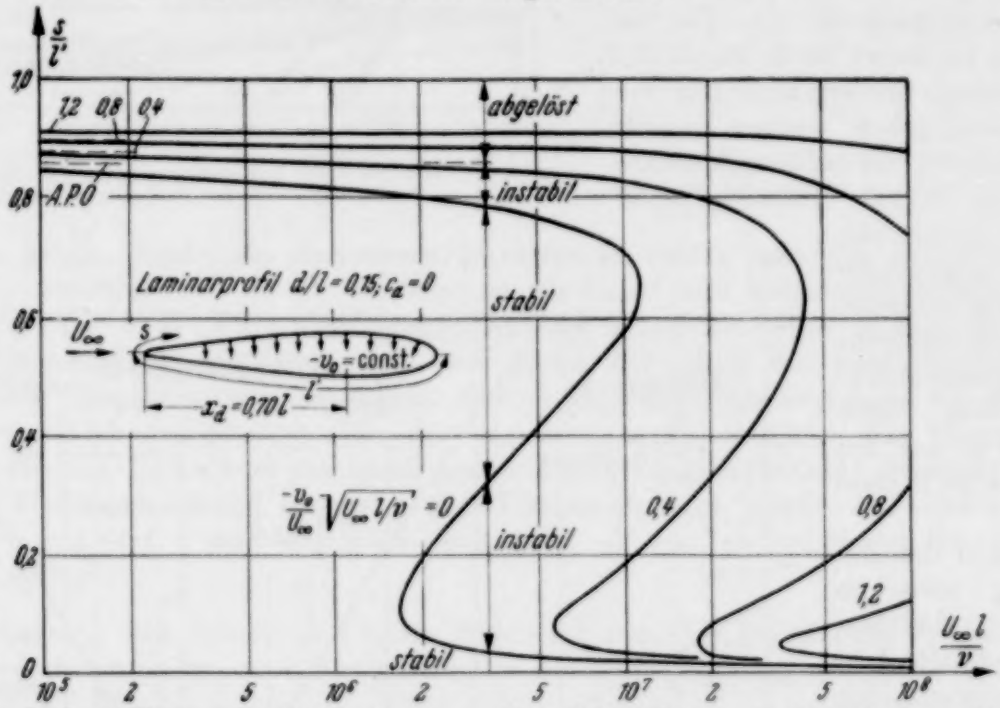


Abb 6. Lage der Instabilitätspunkte s/l' beim Laminarprofil in Abhängigkeit von der Reynoldsschen Zahl $U_\infty\, l/\nu$.

4. Ergebnisse für Laminarprofile. Flügelschnitte, bei denen sich der Druckabfall über einen weiten Bereich der Kontur erstreckt, ermöglichen große laminare Laufstrecken. Wie sich eine

---

[1] Es ist $c_Q^* = \int_0^1 -v_0/U_\infty\sqrt{U_\infty\, l/\nu}\, d(s/l') = c_Q\sqrt{U_\infty\, l/\nu}$.

[2] *Holstein* fand $c_Q = 1{,}1\cdot 10^{-4}$ bis $2{,}8\cdot 10^{-4}$, allerdings bei Punktabsaugung.

Absaugung bei diesen Profilen auf die Umschlagslage auswirkt, sei am Beispiel eines Laminarprofils mit extrem großer Dickenrücklage gezeigt. Abb. 6 bezieht sich auf ein verallgemeinertes Joukowsky-Profil von 15% Dicke und 70% Dickenrücklage bei symmetrischem Anstrom und homogener Absaugung. Ein Vergleich mit Abb. 5 zeigt: die Stabilitätskurven des schwach abgesaugten Laminarprofils sind von gleichem Charakter wie die des üblichen Profils bei starker Absaugung. Auch hier entstehen in bestimmtem *Re*-Bereich drei Instabilitätspunkte, wobei zwischem vorderem und mittlerem und nach dem hinteren die Grenzschichtdicke den kritischen Wert überschreitet. In diesem Bereich wird der Umschlagspunkt sprungartig nach vorn verlegt. Verstärkte Absaugung verschiebt diesen *Re*-Zahl-Bereich nach oben, beeinflußt jedoch die Lage des vorderen und hinteren Umschlagspunktes nur geringfügig. Dementsprechend wird man sich bei diesen Tragflügelprofilen auf die Beseitigung des vorderen Instabilitätsbereichs beschränken, denn die geringe Verlagerung des hinteren Umschlagspunktes durch verstärktes Absaugen ist unwirtschaftlich. Zur Laminarhaltung bis zum hinteren Umschlagspunkt kommt man mit kleinen Mengenbeiwerten der optimalen Absaugeverteilung aus: bei $Re = 10^7$ ist ein c_Q^*-Wert von 0,35 entsprechend $c_Q = 1{,}1 \cdot 10^{-4}$ erforderlich.

5. Zusammenfassung. Die Untersuchungsergebnisse zeigen, wie man durch kontinuierliches Absaugen die im Druckanstiegsgebiet des Tragflügels vorhandene Umschlagsgefahr beseitigen kann. Ermöglicht werden dadurch weitgehend laminare Grenzschichten bei großen *Reynolds*schen Zahlen und, wie weitere Rechnungen[1] ergaben, auch bei hohen Auftriebsbeiwerten und Dickenverhältnissen. Eine Dosierung der Sauggeschwindigkeit über der Profilkontur (gemäß der Optimalverteilung) bringt gegenüber der homogenen Absaugung Mengen- und Leistungsersparnis mit sich. Besonders geringe Absaugmengen benötigt man bei Profilen mit großer Dickenrücklage.

(Eingegangen am 30. April 1951.)

Anschrift des Verfassers: Dipl.-Ing. *H. Krüger*, Göttingen, Wiesenstr. 16.

[1] Braunschweiger Diplomarbeit des Verfassers.

Zur Veranschaulichung und Erweiterung der Theorie des Pendels mit oszillierendem Drehpunkt.

Von W. Kucharski.

1. Kurze Inhaltsangabe. Im Abschnitt **2** der folgenden Mitteilung werden nach Aufstellung der grundlegenden Gleichungen die Vorgänge bei einem Pendel mit schnell oszillierendem Drehpunkt bei ebener Bewegung der physikalischen Anschauung nähergebracht. Der physikalische „Effekt" der Oszillationen besteht hiernach darin, daß die Impulseinwirkungen auf die Pendelmasse in der einen Drehrichtung überwiegen; die Pendelmasse erhält so im Ganzen einen Antrieb, der den spitzen Winkel zwischen der Pendelstange und der Oszillationsrichtung zu verkleinern sucht. Man kann auch hier von einer „Tendenz zum Parallelismus" sprechen. Diese Wirkung ist zu vergleichen mit derjenigen einer kontinuierlichen elastischen Rückstellkraft, welche dem Sinus des doppelten Winkels mit der Oszillationsrichtung proportional ist.

Im Abschnitt **3** wird hieraus die Konsequenz gezogen, daß die Pendelbewegung im allgemeinen aus einer langsamen Grundbewegung bestehen wird, die sich aus der genannten resultierenden Impulseinwirkung der Oszillationen und etwaigen eingeprägten Kräften ergibt, und einer darüber gelagerten Zusatzbewegung von hoher Frequenz und kleiner Amplitude. Im Rahmen der für diese Theorie üblichen und gerechtfertigten Annäherungen wird dies verifiziert; die Zusatzbewegung ergibt sich als eine Schwebung, deren Amplitude dem Sinus des Winkels zwischen Pendelachse und Oszillationsrichtung proportional ist.

2. Die Grundgleichungen; einige Betrachtungen zur Veranschaulichung. a) Der Schwerpunkt A einer starren Masse m_1 ist laut Abb. 1 in der x-Richtung reibungslos geführt. Um A kann sich ein Pendelkörper ebenfalls reibungslos drehen, welcher der Einfachheit wegen als eine „konzentrierte" Masse m mit einer masselos gedachten starren Stange von der Länge l dargestellt ist. Der Winkel zwischen der Pendelstange und der negativen x-Richtung sei φ. Das System hat zwei Freiheitsgrade; offenbar sind x und φ ausreichende und unabhängige Koordinaten. Die Einheitsvektoren in der x-Richtung bzw. in der Richtung der bzw. senkrecht zur Pendelstange seien $\bar{e}_x$ bzw. $\bar{e}_r$ bzw. $\bar{e}_u$; $\bar{e}_x$ ist auch der Richtung nach konstant; $\bar{e}_r$ und $\bar{e}_u$ drehen sich mit der Winkelgeschwindigkeit $\dot{\varphi}$ der Pendelstange, sind also mit der Zeit t veränderlich.

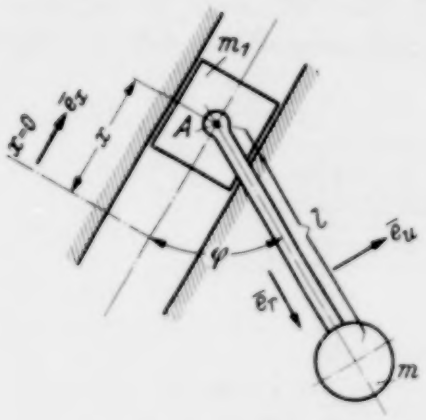


Abb. 1. Anordnung mit Bezeichnungen.

Die kinetische Energie ist

$$E = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m (\dot{x}\bar{e}_x + l\dot{\varphi}\,\bar{e}_u)^2; \tag{1}$$

hieraus erhält man mit $\bar{e}_x \cdot \bar{e}_u = \sin\varphi$ leicht die Bewegungsgleichungen zu

$$(m_1 + m)\,\ddot{x} + ml\frac{d}{dt}(\dot{\varphi}\sin\varphi) = P_x \tag{2}$$

und

$$ml(\ddot{x}\sin\varphi + l\ddot{\varphi}) = P_\varphi, \tag{3}$$

worin P_x bzw. P_φ die eingeprägten Kraftgrößen für die Koordinaten x bzw. φ bedeuten; P_φ ist naturgemäß ein Moment.

Die Bewegung von A wird in den wichtigsten hier interessierenden Fällen als zwangsläufig angesehen werden. Gleichung (3) enthält dann $\ddot{x}$ als gegebene Funktion von t und ist bei gegebenem P_φ, das auch Null sein kann, für sich zu integrieren; Gleichung (2) dient jetzt zur Berechnung von P_x, das durch die Idealisierung der Bewegung von m_1 zur Reaktionskraft geworden ist.

Das zu behandelnde System ist einfach, hat aber merkwürdige, durchaus nicht trivial erscheinende Eigenschaften, deren Herausarbeitung zum Zweck einer physikalischen Anschauung der Vorgänge beim oszillierenden Pendel die Aufgabe dieses Abschnitts sein soll. Vom Pendel

mit oszillierendem Drehpunkt oder gelegentlich auch kürzer vom oszillierenden Pendel soll gesprochen werden, wenn die zwangsläufige Bewegung in einer periodischen Bewegung von sehr hoher Frequenz und kleiner Amplitude besteht, etwa nach dem Gesetz $x = a\cos\omega t$, wobei dann ω z. B. gegenüber der Frequenz des entsprechenden Schwerependels eine sehr große und a (der halbe Hub von A) gegenüber l eine sehr kleine Zahl ist.

b) Es sei gestattet, mit einer reizvollen und naheliegenden Abschweifung zu beginnen: mit

$$P_x = 0 \qquad \text{und} \qquad P_\varphi = 0 \tag{4}$$

werde die „kräftefreie" Bewegung des Systems kurz untersucht, die bei passenden Anfangsbedingungen eintritt, wenn z. B. die Zeichenebene von Abb. 1 senkrecht zum Vektor der Schwerkraft liegt. Die kinetische Energie und der Gesamtimpuls in der x-Richtung sind jetzt offenbar konstant; mit einfacher Rechnung erhält man

$$\dot\varphi = \frac{C_1}{1 - k^2\sin^2\varphi}; \quad \text{mit} \quad k^2 = \frac{m}{m_1 + m}. \tag{5}$$

Die Integration liefert

$$C_1\,(t - t_0) = E(\varphi, k^2), \tag{6}$$

wo E das elliptische Integral zweiter Gattung (nach *Legendre*) zum Modul k^2 bedeutet, für welches dieser Fall eines der einfachsten physikalischen Beispiele ist.

Man findet leicht, und es entspricht wohl der etwas geschulten Anschauung, daß $\dot\varphi$ im allgemeinen nicht Null sein kann; m_1 erfährt also von m her Reaktionskräfte in Richtung der Pendelstange; $\dot x$ kann daher nicht konstant bleiben. Dagegen hat die Geschwindigkeit des jeweiligen Schwerpunktes von m_1 und m eine konstante x-Komponente $\dot x^*$, und es wird $\dot x = \dot x^* + \dot x_1$, wobei $\dot x_1$ periodisch verläuft. Die weiteren Einzelheiten sind in bekannter Weise zu berechnen.

Hervorzuheben ist noch, daß die Drehimpulsgröße $m l^2\dot\varphi$ des Pendelkörpers um den Drehpunkt A trotz $P_\varphi = 0$ nicht konstant bleibt. Es existiert kein einfacher Drallsatz ohne Zusatzglied für die Koordinate φ, da der Bezugspunkt A mit nicht konstanter Geschwindigkeit, die nicht ständig der Schwerpunkts-Geschwindigkeit parallel ist, fortschreitet. Aber naturgemäß ist der allgemeine Momentensatz für A als Bezugspunkt gültig; aus ihm und dem Schwerpunktssatz könnte man die Bewegungsgleichungen ebenfalls gewinnen (und auch aus den Gesetzen für die Relativbewegung).

Die erwähnte Besonderheit der Koordinate φ äußert sich im Ausdruck (1) für die kinetische Energie dadurch, daß sie hierin explicite durch den Einheitsvektor $\bar e_u$ vorkommt, der mit der festen x-Achse den Winkel $\varphi + \pi/2$ einschließt.

c) Von jetzt an sei x als bekannte Funktion von t gegeben und A durch passende Einrichtungen zwangsläufig in entsprechender Weise bewegt.

Eingeprägte Kräfte für die Koordinate φ mögen zunächst nicht vorhanden sein. Damit werden die Bewegungen des „kräftefreien" Pendelkörpers untersucht, etwa für den Fall, daß die Bewegungsebene horizontal liegt wie in Abschnitt b. Mit $P_\varphi = 0$ wird jetzt

$$\ddot\varphi = -\ddot\xi\sin\varphi \qquad \left(\xi = \frac{x}{l}\right) \tag{7}$$

mit bekanntem $\ddot\xi(t)$ die maßgebende Gleichung.

Sie hat eine anschauliche Bedeutung. Die Pendelstange ist eine Gelenkstange, kann daher auf m nur eine durch A gehende Zentralkraft von der Richtung $\pm\bar e_r$ übertragen. Bei Abwesenheit sonstiger Kräfte, wie sie hier vorausgesetzt ist, liegt also die absolute Beschleunigung $d\bar v/dt$ von m ständig in der Richtung der Pendelstange. Nun ist

$$\frac{d\bar v}{dt} = \ddot x\bar e_x - \varphi^2 l\bar e_r + \ddot\varphi l\bar e_u;$$

hiervon liegt $\dot\varphi^2 l$ bereits in der Stangenrichtung; die zu dieser senkrechte Komponente von $\ddot x$ muß daher entgegengesetzt gleich $\ddot\varphi l$ sein, wie (7) es ausspricht. Wenn es daher in einer Literaturstelle heißt, daß die Bewegung von m in die Stangenrichtung fällt, so ist dies nicht richtig; die Geschwindigkeit von m wird im allgemeinen auch Komponenten senkrecht zur Stange haben, und es wird sich zeigen, daß diese für die bekannten besonderen „Effekte" an diesem System maßgebende Bedeutung haben.

Es werden nun einige Fälle behandelt, die zur Veranschaulichung dieser Erscheinungen beitragen; es hat sich gezeigt, daß auch bei diesem System die Betrachtung von Stoßvorgängen instruktiv ist.

1. Zur Zeit $t=t_0$ sei das System in Ruhe, etwa mit $\varphi=\varphi_0$. In dem darauffolgenden Zeitintervall Δt werde A durch geeignete Kräfte auf die Geschwindigkeit $\Delta\dot{x}$ gebracht. In bekannter Weise werde nun $\Delta t\to 0$ angenommen, die Kräfte auf A aber so gesteigert, daß $\Delta\dot{x}$ den in Aussicht genommenen Wert erhält. Bei genügend kleinem Δt wird dann die gleichzeitige Lagenänderung von m_1 und auch diejenige von m beliebig klein ausfallen. Mit anderen Worten: für einen Stoßvorgang dieser Art kann (7) bei konstant bleibendem φ über t während $\Delta t\to 0$ integriert werden und liefert

$$\Delta\dot{\varphi}=-\Delta\dot{\xi}\sin\varphi \tag{8}$$

für einen Stoßvorgang.

Diese Gesetzmäßigkeit besteht auch, wenn die Geschwindigkeitsgrößen vor dem Stoß von Null verschieden sind.

Der Drehkörper erhält also durch den Stoß (Hammerschlag od. dgl.) auf den Körper m_1 eine plötzliche Änderung der Winkelgeschwindigkeit, obwohl die verbindende Stange nur Kräfte in der radialen Richtung übertragen kann. Besonders paradox erscheint dies bei $\varphi_0=\pi/2$; man stellt leicht fest, daß hierbei die in der Stange auftretende Kraft beschränkt bleibt, als Zugkraft vom Betrage $m(\Delta\dot{\varphi})^2 l$, entsprechend der sofort auftretenden Centripetalbeschleunigung.

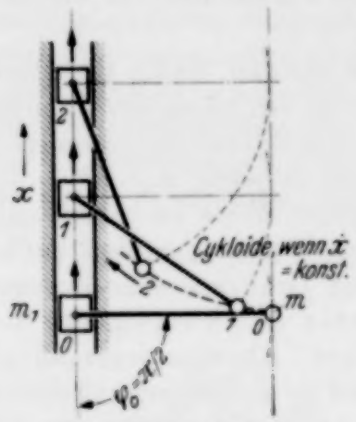


Abb. 2. Eine kräftefreie Bewegung.

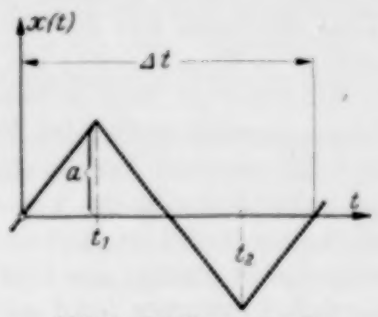


Abb. 3. Stoßbewegung des Drehpunktes.

Wird nach dem Stoß $\dot{x}$ konstant gehalten, so bleibt auch $\dot{\varphi}$ konstant; der Pendelkörper dreht sich dann gleichförmig um A.

Man kann sich in den Vorgang etwas mehr „hineinfühlen", wenn man die Absolutbewegung betrachtet. Bei $\varphi_0=\pi/2$ und vollkommener Ruhe vor dem Stoß bewegt sich m auf einer einfachen Zykloide; in Abb. 2 ist dies skizziert; drei in gleichen Intervallen aufeinanderfolgende Lagen 00, 11, 22 der Stange sind gezeichnet, die vom freien Endpunkt beschriebene Zykloide angedeutet.

Man beachte, daß bei $\Delta\dot{\xi}>0$ stets $\Delta\dot{\varphi}<0$ für $0<\varphi_0<\pi$. Bei $\varphi_0>\pi/2$ wird die Stoßkraft in der Stange eine Druckkraft; dies ist ebenfalls wesentlich. Bei Ersatz der Stange durch einen Faden wäre die Gültigkeit von (8) einzuschränken durch die Zusatzbedingung: Reaktionskraft >0.

Die einfache Tatsache, daß die rechte Seite von (8) den Faktor $\sin\varphi$ hat, erweist sich später als besonders wichtig; $|\Delta\dot{\varphi}|$ ist um so größer, je größer $|\sin\varphi|$ ist, entsprechend für kleinere $|\sin\varphi|$.

Nach dieser Vorbereitung wird nun ein Fall behandelt, der bereits die wesentlichen Züge des oszillierenden Pendels aufweist.

2. A werde nach dem aus Abb. 3 ersichtlichen Gesetz hin- und herbewegt: $|\dot{x}|=v_0=\text{const}$; aber zu den Zeiten $t_1, t_2, \ldots$ im Abstand $\Delta t/2$ werde durch einen passenden Stoßimpuls die Geschwindigkeitsrichtung jeweils bei $|x|=a$ umgekehrt, so daß hier jeweils ein Geschwindigkeitssprung vom Betrage $2v_0$ erfolgt; $-2v_0$ bei t_1, $+2v_0$ bei t_2.

Für $t<t_1$ sei $\dot{\varphi}=0$, und $0<\varphi<\pi/2$.

Dann ist nach (8) unmittelbar nach dem ersten Stoß auf m_1

$$\dot{\varphi}=\dot{\varphi}_1=\frac{2v_0}{l}\sin\varphi_0 \qquad \text{für} \qquad t_1<t\leq t_2. \tag{9}$$

Mit dieser konstanten Winkelgeschwindigkeit dreht sich der Pendelkörper während des Zeitintervalles $\Delta t/2$; der zweite Stoß trifft ihn auf dem Winkel $\varphi_1=\varphi_0+\dot{\varphi}_1\frac{\Delta t}{2}$ Daher ist (da $\Delta\dot{x}=+2v_0$ für $t=t_2$)

$$\dot{\varphi}_2=\dot{\varphi}_1-2\frac{v_0}{l}\sin\varphi_1=\dot{\varphi}_1-\frac{2v_0}{l}\sin\left(\varphi_0+\dot{\varphi}_1\frac{\Delta t}{2}\right) \qquad \text{für} \qquad t_2<t<t_3. \tag{10}$$

Offenbar ist $\varphi_1>\varphi_0$; die Änderung von $\dot{\varphi}$ beim zweiten Stoß für $t=t_2$ ist daher dem Betrage

nach größer als diejenige beim ersten Stoß für $t=t_1$. Diese war positiv, die zweite ist negativ; durch die zwei Stöße hat also der Drehkörper einen Zuwachs an Winkelgeschwindigkeit in negativer Richtung erhalten, nämlich (da $\dot{\varphi}=0$ für $t=0$ vorausgesetzt war) nach Einsetzen von (9) in (10)

$$\Delta\dot{\varphi}=\dot{\varphi}_2=-\frac{2\,v_0}{l}\left[\sin\left(\varphi_0+\dot{\varphi}_1\frac{\Delta t}{2}\right)-\sin\varphi_0\right]. \tag{11}$$

Nun mögen die Stöße auf m_1 in so kurzem Zeitabstand erfolgen, daß der Winkel $\dot{\varphi}_1\,\Delta t/2$ sehr klein ist; werden dann Größen zweiter und höherer Ordnung gegenüber 1 gestrichen, so wird nach Einsetzen von $\dot{\varphi}_1$ aus (9)

$$\Delta\dot{\varphi}=-\,2\,\frac{v_0^2}{l^2}\sin\varphi_0\cos\varphi_0\,\Delta t=-\,\frac{v_0^2}{l^2}\sin 2\,\varphi_0\,\Delta t\,. \tag{12}$$

Die zwangsläufige Bewegung von m_1 werde nun periodisch fortgesetzt; Δt ist dann die Zeitperiode. Es hat jetzt einen leichtverständlichen Sinn, (12) durch Δt zu dividieren und das Ergebnis folgendermaßen auszusprechen:

Der Drehkörper erfährt während einer Periode die durchschnittliche Winkelbeschleunigung

$$\frac{\Delta\dot{\varphi}}{\Delta t}=-\,\frac{2\,v_0^2}{l^2}\sin\varphi_0\cos\varphi_0=-\,\frac{v_0^2}{l^2}\sin 2\,\varphi_0\,. \tag{13}$$

Die hiermit angedeutete Vorstellungsweise wird um so besser zutreffen, je größer die Frequenz des Antriebes von A ist, je mehr Stöße also ausgeübt werden, ohne daß sich die Lage φ_0 im Ganzen wesentlich ändert. Der maßgebende „Effekt" der Anordnung besteht darin, daß der Drehkörper durch zahlreiche Stöße ein hieraus sich summierendes Drehmoment erfährt, das seine maßgebende Mittellinie auf dem kürzesten Wege parallel zur x-Richtung zu bringen sucht und dem Sinus des doppelten Winkels proportional ist, ganz ähnlich wie in der kinetischen Gastheorie der Gasdruck durch Summation der sehr häufigen Stoßimpulse der Teilchen errechnet und erklärt wird. Diese Formulierung stimmt offenbar auch, wenn φ in einem anderen Quadranten liegt. In jedem Falle kann man von einer Tendenz zum Parallelismus sprechen.

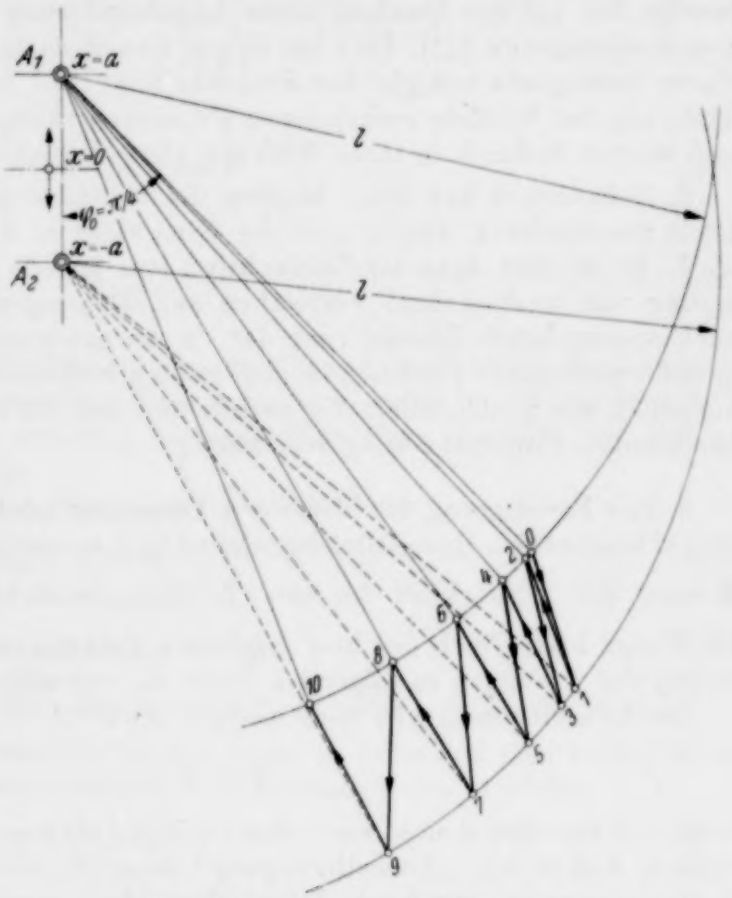


Abb. 4. Schwerpunktsbahn bei Stoßerregung.

In diesem „makroskopischen" Sinn hat demnach der kräftefreie Pendelkörper bei oszillatorischem Antrieb des Drehpunktes drei Gleichgewichtslagen: $\varphi_0=0$, $\varphi_0=\pi$ und $\varphi_0=\pi/2$. Es ist leicht einzusehen, daß davon die ersten beiden stabil die dritte labil ist. Naturgemäß kann bei dieser summarischen Betrachtungsweise nichts darüber ausgesagt werden, ob die hierbei nicht beachteten Zusatzbewegungen von hoher Frequenz mit t anwachsen, abnehmen oder konstant bleiben.

In Abb. 4 ist eine Bewegung der behandelten Art aufgezeichnet. A bewegt sich zwischen A_1 und A_2 nach dem Gesetz von Abb. 3. Die Masse m nimmt mit $\varphi_0=\pi/4$ nacheinander die Lagen 0, 1, 2, 3 . . . 10 an; die von A_1 ausgehenden Lagen der Pendelstange sind ausgezogen, die von A_2 ausgehenden gestrichelt eingetragen. Die anwachsende Winkelgeschwindigkeit nach der Oszillationsachse hin tritt deutlich hervor. Die Figur ist insofern nicht genau, als die Bahnen 01, 12, . . . tatsächlich zykloidenartig schwach gekrümmt sind, womit sich auch die Lagen der

jeweiligen Endpunkte geringfügig ändern. Der Zweck dieser anschaulichen Skizze wird dadurch nicht berührt.

Der Anfangswert von $\dot{\varphi}$ im Punkte 0 ist hierbei mit $-\frac{v_0}{l}\sin\varphi_0$ derartig gewählt, daß sofort eine durchschnittliche Bewegung nach der Oszillationsachse hin eintritt. Würde man z. B. $\dot{\varphi}_0 = 0$ wählen, so würde m im ersten Teil der Bewegung (mit abnehmender „Winkelgeschwindigkeit") noch in den von den beiden Kreisen um A_1 und A_2 gebildeten Zwickel eindringen, aber durch die erläuterten Impulswirkungen in dieser Richtung verzögert und zur Umkehr gezwungen werden, worauf dann eine Bewegung nach Abb. 4 einsetzt. Wird hierbei im ersten Teil $\varphi > \pi/2$ so tritt keine Umkehr ein, sondern eine nach $\varphi = \pi$ hinstrebende Bewegung. Derartige weitere Beispiele sind bei Ersatz der Zykloidenstücke durch Gerade einfach und schnell zu zeichnen; dies ist um so weniger ungenau, je kleiner a/l angenommen wird, das für Abb. 4 im Interesse der Deutlichkeit nicht gerade sehr klein gewählt wurde.

3. In praktisch wichtigen Fällen wird der Antrieb von m_1 etwa nach dem Gesetz

$$x = a\cos\omega t \tag{14}$$

erfolgen. Die bekannte Theorie liefert hierfür den Wert

$$\frac{\Delta\dot{\varphi}}{\Delta t} = -\frac{1}{2}\frac{a^2}{l^2}\omega^2\sin\varphi_0\cdot\cos\varphi_0 = -\frac{1}{4}\frac{a^2}{l^2}\omega^2\sin 2\varphi_0. \tag{15}$$

Der Aufbau dieser Beziehung ist genau derjenige von (13). Hierbei ist die Geschwindigkeitsänderung während einer Halbperiode $\Delta\dot{x} = 2a\omega$, im Falle von (13) dagegen $2v_0$; danach beträgt der auf das Quadrat dieser Impulsänderung bezogene Zahlenfaktor in (14) ein Viertel von demjenigen in (13). Dies hat seinen Grund darin, daß bei sinusartiger Erregung auch $\varphi(t)$ einem Sinusgesetz von gleicher Frequenz folgt; die Vorgänge spielen sich stetig ab; die mit der Änderung des Winkels verbundenen Differenzwirkungen der Impulse verteilen sich gleichmäßig und werden dadurch in ihrer Wirkung abgeschwächt.

4. Bekanntlich hat Herr *Meißner* die vollständige Theorie der linearen Gleichung auf der Basis durchgeführt, daß in (14) die Sinuskurve durch passende Parabelbögen ersetzt wird. In (8) tritt dann als Zeitfunktion eine jeweils für eine Halbperiode konstante Beschleunigung von wechselndem Vorzeichen auf. Demgegenüber stellt der Antrieb nach Abb. 3 eine noch weitergehende Idealisierung dar. In der entsprechenden *Hill*schen Differentialgleichung ist jetzt die periodische Funktion im allgemeinen Null und für successive Zeitwerte $\Delta t/2; \Delta t; 3/2\,\Delta t \ldots$ unendlich mit wechselndem Vorzeichen und von solcher Mächtigkeit, daß eine jedesmal gleiche beschränkte Impulsänderung resultiert.

3. Zur Erweiterung der bisherigen Lösungen. a) In den bisherigen Lösungen hat man sich darauf beschränkt, Quasi-Gleichgewichtslagen zu untersuchen, in denen im Durchschnitt z. B. das Moment der Schwerkraft der unter **2.** veranschaulichten Impulswirkung $-\frac{1}{2}\frac{a^2}{l^2}\omega^2\sin\varphi_0\cos\varphi_0$ die Waage hält. Nach den hier gegebenen Erläuterungen erscheint es naheliegend, eine Erweiterung der Lösungen in folgender Weise zu versuchen.

Die Gesamtlösung $\varphi(t)$ wird zerlegt, etwa

$$\varphi = \vartheta + \chi, \qquad \chi \ll 1; \tag{16}$$

hierin soll nun aber ϑ nicht wie bisher im Mittel als konstant angesehen, sondern dadurch definiert werden, daß es eine „Grundbewegung" darstellt, wie sie sich unter dem Einfluß eingeprägter Kräfte zusammen mit jenem Impulsglied allein ergeben würde, wobei dieses ebenfalls als eingeprägte Kraftgröße behandelt wird. Dabei braucht ϑ nicht klein zu sein; lediglich $\dot{\vartheta}$ und $\ddot{\vartheta}$ werden gegenüber den entsprechenden von den Oszillationen herrührenden Größen als genügend klein angenommen.

Es wird also ϑ definiert durch die Differentialgleichung

$$\ddot{\vartheta} = -\frac{1}{2}\frac{a^2}{l^2}\omega^2\sin\vartheta\cos\vartheta + k(\vartheta) \tag{17}$$

unter der Voraussetzung

$$\dot{\vartheta} \ll \omega, \qquad \ddot{\vartheta} \ll \omega^2, \tag{18}$$

worin $k(\vartheta)$ eingeprägte Kraftgrößen bezeichnet, die im allgemeinen von φ und ϑ abhängen werden. Durch die Einschränkung (18) werden u. a. extreme Anfangsbedingungen, wie starke Stöße u.dgl. ausgeschlossen, die z.B. den Pendelkörper in ständige Rotation mit großer durchschnittlicher Winkelgeschwindigkeit versetzen würden. Fälle, die in diesem Zusammenhang nicht von Interesse sind.

Über diese Grundbewegung lagert sich χ als Schwingungsbewegung von sehr hoher Frequenz und kleiner Amplitude.

Wie im folgenden kurz dargelegt wird, führt dieser naheliegende Gedanke zum Erfolg in dem Sinne, daß die noch verbleibenden Restglieder klein von höherer Ordnung ausfallen und mit $\dot{\vartheta}/\omega \to 0$, $a/l \to 0$ stärker nach Null gehen als die „Lösung" selbst, worauf auch die bisherige Theorie basiert.

Mit dieser Genauigkeit ergibt sich χ als eine Schwebung von der Kreisfrequenz ω mit einer zu $\sin\vartheta$ proportionalen Amplitude.

b) Als erster Fall werde

$$k = 0 \tag{19}$$

behandelt; die Oszillationsbewegung von A sei dargestellt durch

$$x = a\cos\omega t;$$

mit $\alpha = a/l$ entsteht dann aus (7) die zu lösende Differentialgleichung

$$\ddot{\varphi} = \alpha\,\omega^2\cos\omega t\sin\varphi. \tag{20}$$

Nun sei

$$\varphi = \vartheta + \chi. \qquad \chi \ll 1; \tag{21}$$

und ϑ definiert durch

$$\ddot{\vartheta} = -\frac{1}{2}\alpha^2\omega^2\sin\vartheta\cos\vartheta \tag{22}$$

mit der Einschränkung

$$\frac{\dot{\vartheta}}{\omega} \ll 1, \qquad \frac{\ddot{\vartheta}}{\omega^2} \ll 1. \tag{23}$$

Gleichung (22) ist allgemein mit elliptischen Funktionen und für genügend kleine ϑ, die immer noch groß gegen χ sein können, durch sin und cos ohne weiteres zu lösen, und es ist klar, daß durch die Einschränkung (23) die praktisch vor allem wichtigen Fälle nicht ausgeschaltet werden; dies läßt sich auch von Fall zu Fall prüfen.

Mit $\chi \ll 1$ wird mit der üblichen Genauigkeit

$$\sin\varphi = \sin\vartheta + \chi\cos\vartheta. \tag{24}$$

Für χ werde nun angesetzt

$$\chi = -\alpha\sin\vartheta\cos\omega t + \psi, \tag{25}$$

wobei durch das zunächst unbekannte ψ die verbleibenden Restglieder usw. erfaßt werden.

Bei der Bildung von $\ddot{\chi}$ aus (25) erscheinen Glieder mit $\dot{\vartheta}$ und $\ddot{\vartheta}$; diese sind aber nach (23) zu streichen [Gleichung (24) berücksichtigt auch nur die erste Ordnung], und es bleibt

$$\ddot{\chi} = \alpha\omega^2\sin\vartheta\cos\omega t + \ddot{\psi}.$$

Setzt man alles in (20) ein und berücksichtigt $\cos^2\omega t = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2\omega t$, so verbleibt für ψ die Differentialgleichung

$$\ddot{\psi} - \alpha\,\omega^2\cos\vartheta\cos\omega t\cdot\psi = -\frac{1}{2}\alpha^2\omega^2\sin\vartheta\cos\vartheta\cos 2\,\omega t. \tag{26}$$

Dies wäre eine gewöhnliche inhomogene *Mathieu*sche Gleichung, wenn ϑ konstant wäre. Das ist nicht der Fall. Entwickelt man aber ϑ von einem gegebenen t aus nach Potenzen von t, was zweifellos erlaubt ist, so erscheinen wieder Glieder mit $\dot{\vartheta}$ und $\ddot{\vartheta}$, die nach (23) im Rahmen der gesamten Genauigkeit zu streichen sind, so daß (26) in diesem Rahmen als *Mathieu*sche Gleichung zu diskutieren ist.

Für die übliche partikuläre Lösung ist die rechte Seite von (26) maßgebend. Diese ist, da auch α als kleine Zahl zu gelten hat, von einer Ordnung kleiner als diejenige von (20). Der entsprechende Anteil von ψ ist daher um eine Ordnung kleiner als χ nach (25) und daher (abgesehen von Resonanzfällen od.dgl.) im Rahmen der allgemeinen Genauigkeit zu streichen.

Es verbleibt der homogene Anteil von ψ, maßgebend für die Stabilität „im kleinen". Diese wird zum Schluß in einem gemeinsamen Abschnitt behandelt; unter den üblichen Verhältnissen ist die homogene Lösung von (26) stabil.

Hiernach setzt sich die kräftefreie Bewegung des Pendelkörpers im Rahmen der üblichen Genauigkeit zusammen aus einer langsamen Schwingung um die im „Großen" stabilen Gleichgewichtslagen $\vartheta = 0$ und $\vartheta = \pi$, deren Frequenz durch (22) und bei größerem ϑ durch die Anfangsbedingungen gegeben ist, und aus einer Schwebung nach (25) mit der Frequenz ω und der Amplitude $\alpha \sin \vartheta$.

Für kleine Werte von ϑ mit $\sin \vartheta \approx \vartheta$ und $\cos \vartheta \approx 1$ läßt sich alles leicht ausrechnen; man erhält dann z. B.

$$\left.\begin{aligned} \vartheta &= \vartheta_0 \sin \sqrt{\frac{1}{2}}\, \alpha\omega t\,, \\ \chi &= -\alpha \vartheta_0 \sin \sqrt{\frac{1}{2}}\, \alpha\omega t \cos \omega t \end{aligned}\right| \quad \text{für } \sin \vartheta_0 \approx \vartheta_0. \tag{27}$$

Das Verhältnis der Grund- zur Schwebungsfrequenz ist dann $\sqrt{\frac{1}{2}}\,\alpha$. In Abb. 5 und 6 ist dies für

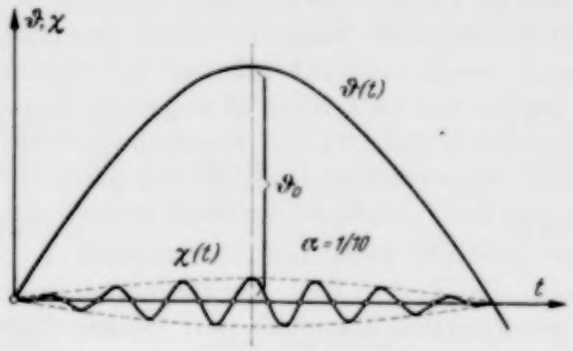


Abb. 5. Hauptbewegung und Schwebung bei kräftefreiem Pendel.

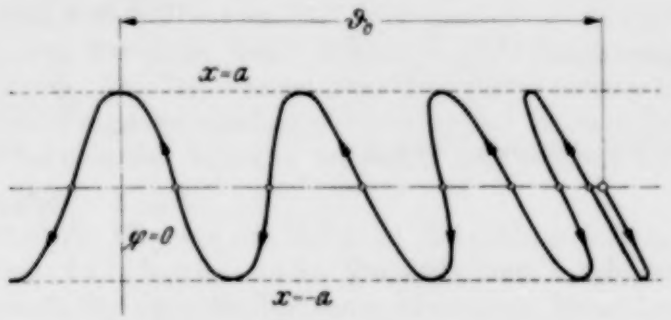


Abb. 6. Schwerpunktsbahn bei kräftefreiem Pendel.

$\alpha = 1/10$ skizziert. Abb. 5 zeigt ϑ und χ als Funktion von t; in Abb. 6 ist die Bahnkurve von m angedeutet, wobei der Kleinheit von ϑ_0 entsprechend die schwach gekrümmten Kreise um A als gerade Linien angenommen wurden. Die Gleichung der Kurve ist durch die angegebene Lösung ohne weiteres in t als Parameter gegeben, sämtliche Einzelheiten sind leicht zu diskutieren. (In der Skizze Abb. 6 ist zur Vereinfachung $10\sqrt{2} \approx 15$ benutzt worden.)

Abb. 7. Eine Doppelanordnung.

Hiernach kann ein kräftefreier Drehkörper, etwa das Pendel 1 in Abb. 7, als Anzeigeinstrument für die Richtung der Oszillation des Drehpunktes benutzt werden. Ein gleiches Pendel 2, zu dem ersten unter 180° angeordnet, tut dasselbe und hat bei gleichen Anfangsbedingungen dieselbe Grundschwingung um die Oszillationsrichtung. Man kann aber die beiden Pendel nicht zu einem starren Körper verbinden und dem Instrument dadurch etwa die doppelte Richtkraft und Unabhängigkeit z. B. von der Schwere bei anderer Lage der Bewegungsebene geben. Denn durch eine starre Verbindung entsteht einfach ein ausbalanzierbar starrer Körper, der sich um eine Schwerpunktsachse drehen kann, und die Bewegungsgleichung in φ wird unabhängig von derjenigen in x. Die beiden Pendel hätten jetzt stets dasselbe φ, $\dot{\varphi}$ usw., und die Richtung von $\ddot{x}$ ist ständig für das eine günstig, für das andere ungünstig, und umgekehrt im Sinne der Tendenz zum Parallelismus; die Wirkungen auf das eine neutralisieren die gleichzeitigen auf das andere.

c) Nach Abb. 8 werde nun die Schwerkraft bei horizontaler Oszillationsrichtung berücksichtigt.

Mit $\omega_0^2 = g/l$, wobei ω_0 die Kreisfrequenz des entsprechenden Schwerependels bei kleinen Schwingungen um die Vertikale bedeutet, wird

$$k = \omega_0^2 \cos \varphi,$$

und die zu lösende Differentialgleichung lautet

$$\ddot{\varphi} = \alpha\omega^2 \cos\omega t \sin\varphi + \omega_0^2 \cos\varphi. \tag{28}$$

Wieder sei

$$\varphi = \vartheta + \chi, \quad \sin\varphi = \sin\vartheta + \chi\cos\vartheta;$$

aber ϑ wird jetzt definiert durch

$$\ddot{\vartheta} = -\frac{1}{2}\alpha^2\omega^2 \sin\vartheta\cos\vartheta + \omega_0^2\cos\vartheta. \tag{29}$$

Das hat nur einen Sinn, wenn ω_0^2 von gleicher Ordnung wie $\alpha^2\omega^2$, also gegenüber ω^2 von zweiter Ordnung klein ist; dies wird vorausgesetzt.

Für χ ergibt sich die Differentialgleichung

$$\ddot{\chi} = \frac{1}{2}\alpha^2\omega^2 \sin\vartheta\cos\vartheta + \alpha\omega^2\sin\vartheta\cos\omega t + \alpha\omega^2\cos\vartheta\cos\omega t\cdot\chi - \omega_0^2\sin\vartheta\cdot\chi, \tag{30}$$

die wieder durch den Ansatz

$$\chi = -\alpha\sin\vartheta\cos\omega t + \psi, \quad \ddot{\chi} \approx \alpha\cdot\omega^2\sin\vartheta\cos\omega t + \ddot{\psi} \tag{31}$$

gelöst wird, wobei in $\ddot{\chi}$ die Glieder mit $\dot{\vartheta}$ und $\ddot{\vartheta}$ korrekterweise zu streichen waren. Für ψ verbleibt

$$\ddot{\psi} + (\omega_0^2\sin\vartheta - \alpha\omega^2\cos\vartheta\cos\omega t)\psi = \omega_0^2\sin^2\vartheta\cos\omega t - \frac{1}{2}\alpha^2\omega^2\sin\vartheta\cos 2\omega t. \tag{32}$$

Die rechte Seite hiervon ist wieder um eine Ordnung höher als die entsprechenden Glieder in der Gleichung (30) für χ, die partikuläre Lösung von (32) ist also zu streichen.

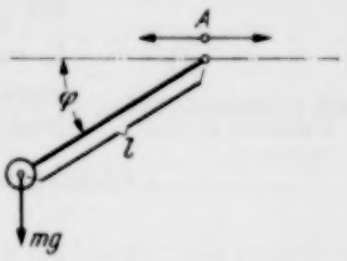


Abb. 8. Schwerewirkung, Oszillation horizontal.

Wie im vorhergehenden Abschnitt gezeigt wurde, ist ϑ in der verbleibenden homogenen Gleichung als „sehr langsam veränderlicher Parameter" zu betrachten, die Gleichung daher im Rahmen der gesamten Genauigkeit als *Mathieu*sche zu diskutieren, in welcher jetzt auch ein konstanter Faktor von ψ auftritt. Die hiermit verbundene Untersuchung der Stabilität im kleinen erfolgt zusammenfassend zum Schluß.

Für ϑ ergibt (29) wieder die Möglichkeit von Gleichgewichtszuständen, etwa für $\vartheta = \vartheta_0$; nämlich für $\cos\vartheta_0 = 0$, $\vartheta_0 = \pm\pi/2$; (also für die beiden vertikalen Lagen) und für

$$\sin\vartheta_0 = \frac{2\omega_0^2}{\alpha^2\omega^2}. \tag{33}$$

Die rechte Seite ist stets positiv; damit aber $\sin\vartheta_0$ reell ausfällt, muß offenbar

$$\frac{1}{2}\alpha^2\omega^2 \geq \omega_0^2 \tag{34}$$

sein. Wenn dies der Fall ist, dann gibt (33) die bekannten Gleichgewichtslagen, nämlich bei $\frac{1}{2}\alpha^2\omega^2 > \omega_0^2$ zwei zur Vertikalen symmetrisch liegende, und für $\frac{1}{2}\alpha^2\omega^2 = \omega_0^2$ die vertikale Lage $\vartheta_0 = +\pi/2$.

Durch eine einfache Betrachtung der bei Abweichungen aus diesen Gleichgewichtslagen auftretenden Änderungen von $\frac{1}{2}\alpha^2\omega^2\sin\vartheta\cos\vartheta$ und $\omega_0^2\cos\vartheta$ stellt man elementar fest, daß im „Großen"

$$\left.\begin{aligned} &\text{die Lage } \vartheta_0 = +\pi/2 \left\{\begin{matrix}\text{stabil}\\ \text{indifferent}\\ \text{labil}\end{matrix}\right\} \text{ ist für } \frac{1}{2}\alpha^2\omega^2 \lessgtr \omega_0^2,\\ &\text{die Lage } \vartheta_0 = -\pi/2 \text{ stets labil,}\\ &\text{die Lagen } \sin\vartheta_0 = \frac{2\omega_0^2}{\alpha^2\omega^2} < 1 \text{ stabil} \end{aligned}\right\} \tag{35}$$

sind.

Bei genügend großem ω^2 wird ϑ_0 nach (33) beliebig klein, dann ist also, wie bekannt, die im Großen stabile Pendellage mit beliebiger Annäherung horizontal.

Der endgültige Vergleich mit den bisher gewonnenen Ergebnissen wird bei Diskussion der homogenen Gleichung durchgeführt.

d) Bei vertikaler Oszillationsrichtung im Schwerefeld (Abb. 9) tritt

$$\ddot{\varphi} = \alpha\,\omega^2 \cos \omega t \sin \varphi - \omega_0^2 \sin \varphi \tag{36}$$

an die Stelle von (28); ϑ soll jetzt die Gleichung

$$\ddot{\vartheta} = -\frac{1}{2}\,\alpha^2 \omega^2 \sin \vartheta \cos \vartheta - \omega_0^2 \sin \vartheta \tag{37}$$

erfüllen; für χ ergibt sich an Stelle von (30)

$$\ddot{\chi} = \frac{1}{2}\,\alpha^2 \omega^2 \sin \vartheta \cos \vartheta + \alpha\,\omega^2 \sin \vartheta \cos \omega t - \omega_0^2 \cos \vartheta \cdot \chi + \alpha\,\omega^2 \cos \vartheta \cos \omega t \cdot \chi, \tag{38}$$

Abb. 9. Schwerewirkung, Oszillation vertikal.

und mit dem gleichen Ansatz (31) für χ verbleibt für ψ

$$\ddot{\psi} + (\omega_0^2 \cos \vartheta - \alpha\omega^2 \cos \vartheta \cos \omega t)\,\psi = \\ = \alpha\omega_0^2 \sin \vartheta \cos \vartheta \cos \omega t - \frac{1}{2}\,\alpha^2 \omega^2 \sin \vartheta \cos \vartheta \cos 2\omega t, \tag{39}$$

wovon wieder die partikuläre Lösung zu streichen ist.

Die Gleichgewichtslagen für ϑ sind jetzt offenbar

$$\vartheta_0 = 0, \quad \vartheta_0 = \pi \quad \text{und} \quad \vartheta_0 = \arccos\left(-\frac{2\,\omega_0^2}{\alpha^2 \omega^2}\right); \tag{40}$$

bei $\frac{1}{2}\,\alpha^2\omega^2 > 2\,\omega_0^2$ gibt es jetzt also außer den beiden vertikalen Lagen noch je zwei symmetrische in der oberen Halbebene, in Abb. 9 strichpunktiert angedeutet. Eine elementare Betrachtung gibt wieder Auskunft über die Stabilität „im Großen“:

$$\left.\begin{aligned} &\text{Gleichgewichtslage } \vartheta_0 = 0 \quad \text{stabil für alle } \omega^2, \\ &\text{Gleichgewichtslage } \vartheta_0 = \pi \begin{Bmatrix} \text{stabil} \\ \text{indifferent} \\ \text{labil} \end{Bmatrix} \text{für } \frac{1}{2}\,\alpha^2\omega^2 \gtreqless \omega_0^2, \\ &\text{Gleichgewichtslage } \pi/2 < \vartheta_0 < \pi \text{ labil.} \end{aligned}\right\} \tag{41}$$

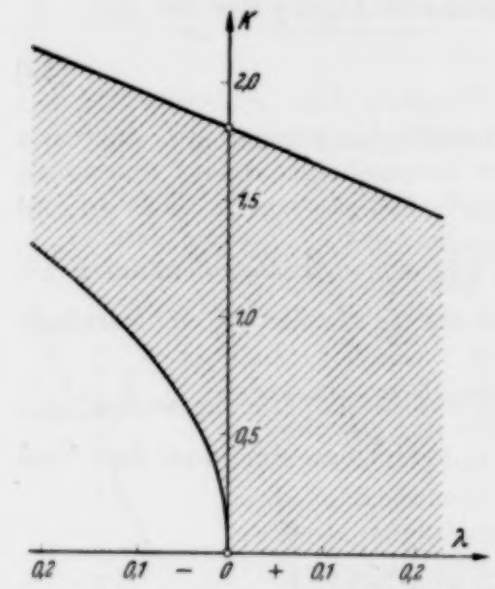


Abb. 10. Gebiete der Stabilität und der Labilität „im kleinen“.

e) Die noch zu behandelnden homogenen Gleichungen für ψ werden mit $\omega t = 2\pi$ auf die häufig benutzte Normalform

$$\frac{d^2\psi}{d\tau^2} + (\lambda + k \cos 2\tau)\,\psi = 0 \tag{42}$$

gebracht. Das hier benutzte k entspricht $2\,h^2$ bei *Strutt*[1], *Klotter* und *Kotowski*[2] benutzen λ, γ, x anstatt $\lambda, k, 2\tau$ in (42). Die hier in Frage kommenden Werte von k und λ sind klein; für die Beurteilung der Stabilität kommt es in einer Darstellung $k(\lambda)$ auf die Umgebung des Punktes $\lambda = 0$ an. In Abb. 10 sind die hier interessierenden Gebiete dargestellt; in dem schraffierten besteht Stabilität, auf den Grenzkurven und in dem freigelassenen Gebiet Labilität, soweit es auf die Lösung der homogenen Gleichung ankommt.

Da es sich hier um angenäherte Lösungen handelt, bei denen nur von erster Ordnung kleine Glieder berücksichtigt werden, genügen auch für die Grenzkurven die einfachsten Abschätzungen, die in k bis zu k^2 gehen und in λ die jeweils kleinsten Glieder beibehalten, nämlich

$$|k| = 1{,}80\,(1 - 0{,}91)\,\lambda \quad \text{und} \quad |k| = \sqrt{8(-\lambda)}\,, \tag{43}$$

wovon die erste Gleichung die obere Grenzkurve dieses Bereiches für $\lambda \gtrless 0$ darstellt, die zweite die untere für $\lambda \leq 0$. Auf der oberen ist k nicht mehr klein; trotzdem ist die Übereinstimmung

[1] *M. J. O. Strutt*, *Lamé*sche, *Mathieu*sche und verwandte Funktionen in Physik und Technik. Berlin 1932.

[2] *K. Klotter* u. *G. Kotowski*, Z. angew. Math. Mech. 19 (1939) S. 289.

des angegebenen Wertes z. B. mit der bekannten sog. *Strutt*schen Karte bereits vollauf genügend; die Berücksichtigung des Gliedes mit k^4 liefert Korrekturen, die hier nicht von Bedeutung sind.

Hieraus ergibt sich die zu dieser Mitteilung gehörende „Tabelle für die Stabilität nach der homogenen Gleichung". Das Hauptergebnis ist: Bei genügend großem ω und passendem (weder zu großem noch zu kleinen) α ist in allen Fällen Stabilität der Bewegung nach der homogenen Gleichung zu erzielen.

Diese Bedingungen sind nun zu vergleichen mit denjenigen, die sich bei Existenz stabiler Gleichgewichtslagen $\vartheta = \vartheta_0$ „im Großen" für diese ergeben haben:

Im Falle a (kräftefreies Pendel) ist $\vartheta_0 = 0$ stabil, ohne besondere Bedingung hierfür. In diesem Fall wird also durch die homogene Gleichung laut Tabelle 1 α nach oben begrenzt; das ist aber unwesentlich, da $\alpha < 0{,}45$ stets erfüllt sein muß, wenn die ganze Annäherungsrechnung einen Sinn haben soll; sie verlangt $\alpha \ll 1$.

Tabelle 1. *Für die Stabilität nach der jeweiligen homogenen Gleichung.*

Nr.		Abschnitt dieser Arbeit	Nr. der Gleichung	Kennzeichnung des Falls	λ	K	Stabilitätsbedingung (für die homogene Gleichung)
a		b)	(26)	kräftefrei	0	$4\alpha\lvert\cos\vartheta\rvert$	$0 \leqq \alpha\lvert\cos\vartheta\rvert < 0{,}45$
b	1	c)	(32)	Schwerkraft 0.-Richtung horizontal	$\frac{4\omega_0^2}{\omega^2}\sin\vartheta$ $\sin\vartheta > 0$	$4\alpha\lvert\cos\vartheta\rvert$	$0 \leqq \alpha\lvert\cos\vartheta\rvert < 0{,}45\,(1 - 0{,}91\lambda)$
	2	c)	(32)	„	$\frac{4\omega_0^2}{\omega^2}\sin\vartheta$ $\sin\vartheta < 0$	$4\alpha\lvert\cos\vartheta\rvert$	$\frac{\omega_0}{\omega}\sqrt{2\lvert\sin\vartheta\rvert} < \alpha\lvert\cos\vartheta\rvert < 0{,}45\,(1 - 0{,}91\lambda)$
c	1	d)	(39)	Schwerkraft 0.-Richtung vertikal	$\frac{4\omega_0^2}{\omega^2}\cos\vartheta$ $\cos\vartheta > 0$	$4\alpha\lvert\cos\vartheta\rvert$	$0 \leqq \alpha\lvert\cos\vartheta\rvert < 0{,}45\,(1 - 0{,}91\lambda)$
	2	d)	(39)	„	$\frac{4\omega_0^2}{\omega^2}\cos\vartheta$ $\cos\vartheta < 0$	$4\alpha\lvert\cos\vartheta\rvert$	$\frac{\omega_0}{\omega}\sqrt{2\lvert\sin\vartheta\rvert} < \alpha\lvert\cos\vartheta\rvert < 0{,}45\,(1 - 0{,}91\lambda)$

Im Falle b 1 (Schwerkraft, 0.-Richtung horizontal, untere Halbebene) gibt es nach (33) und (35) stabile Lagen, wenn $\frac{\omega_0}{\omega} = \alpha\sqrt{\frac{\sin\vartheta_0}{2}}$ ist; diese Bedingung kommt also gegebenenfalls zu derjenigen für α nach der Tabelle hinzu. Hier bildet $\vartheta_0 = \pi/2$ eine Ausnahme; diese Lage ist nur stabil, wenn

$$\frac{\omega_0}{\omega} > \alpha\sqrt{\frac{1}{2}}\,.$$

Im Falle b 2 (wie vorstehend, aber obere Halbebene) gibt es keine stabilen Lagen für ϑ.

Im Falle c 1 (Schwerkraft, 0.-Richtung vertikal, untere Halbebene) ist $\vartheta_0 = 0$ stabil im Großen, ohne Bedingung hierfür; Einschränkung von α lediglich durch die Bedingung der Tabelle.

Im Falle c 2 (wie vorstehend, aber obere Halbebene) ist nach (41) $\vartheta_0 = \pi$ stabil, wenn $\frac{\omega_0}{\omega} < \alpha\sqrt{\frac{1}{2}}$; dies ist in diesem Falle die gleiche Bedingung wie diejenige nach der Tabelle für die Zusatzbewegung.

Hieraus folgt: Der stabile Bereich für die Lösungen der homogenen Gleichungen enthält alle stabilen Gleichgewichtslagen (im „Großen") und außerdem weitgehende Möglichkeiten für stabile „Grundbewegungen", wie sie jeweils durch $\vartheta(t)$ mit $\dot{\vartheta} \ll \omega$ und $\ddot{\vartheta} \ll \omega^2$ dargestellt werden und über welche sich die durch $\chi = -\alpha\sin\vartheta\cos\omega t$ dargestellten Schwebungen lagern.

f) Eine Verfeinerung der Theorie ist z. B. in fofgender Weise möglich: $\vartheta(t)$, wofür hier nur die periodischen Bewegungen berücksichtigt werden sollen, kann immer als *Fourier*sche

Reihe angesetzt werden; in vielen Fällen werden wenige Glieder hiervon vollkommen ausreichen. Hiermit und mit dem Ansatz für χ nach (25) wird dann in die Differentialgleichung für φ hineingegangen, in welcher nun aber alles beibehalten werden muß, was dem gewünschten Genauigkeitsgrad entspricht. Es hat also wenig Sinn, Glieder höherer Ordnung z. B. bei einer partikulären Lösung für ψ zu diskutieren, nachdem man sie durch $\sin\varphi = \sin\vartheta + \chi\cos\vartheta$ an anderer Stelle des Gedankenganges gestrichen hat. Bei konsequentem Vorgehen erhält man so die Möglichkeit, auch z. B. in $\ddot{\chi}$ das bisher konsequenterweise gestrichene $\dot{\vartheta}$ und $\ddot{\vartheta}$ sinngemäß zu berücksichtigen. Zum Schluß entsteht so eine Differentialgleichung für ψ, die wie bisher linear ist, und deren Faktor von ψ ebenfalls periodische Funktionen von t enthält, mit dem wesentlichen Unterschied, daß hierin jetzt zwei Perioden auftreten, nämlich außer $2\pi/\omega$ noch diejenige von ϑ. Sehr häufig werden diese nicht in einem rationalen Verhältnis stehen; man hat es dann weder mit einer *Mathieu*schen noch mit einer allgemeinen *Hill*schen Differentialgleichung zu tun. Für die Anwendung wird man aber häufig genügend genau und sicher vorgehen, wenn man in solchen Fällen ein benachbartes rationales Periodenverhältnis für die rechnerische Abschätzung zugrunde legt (also z. B. 14 oder 15 anstatt $10\sqrt{2}$), womit dann wieder eine Grundperiode erzielt wird und die bekannten Schlußweisen für die *Hill*sche Gleichung zur Verfügung stehen. In dieser und anderer Richtung gibt *Hamels*[1] Arbeit zahlreiche Ausführungen und Anregungen nebst der notwendigen Kritik.

Der Verfasser hat sich überzeugt, daß dieses Verfahren zum Ziele führt; zur Veröffentlichung sind die naturgemäß etwas umständlichen Rechnungen im Ganzen wenig geeignet.

g) Dagegen erscheint es lohnend, auf eine hierbei auftretende Teilaufgabe in kurzen Zügen einzugehen. Die zu lösende Differentialgleichung sei

$$\frac{d^2x}{d\tau^2} + \left(\lambda + k\sin\frac{2\tau}{m}\cos 2\tau\right)x = 0 \qquad (m = \text{ganze Zahl}). \tag{44}$$

Gegenüber der gewöhnlichen *Mathieu*schen Gleichung

$$\frac{d^2x}{d\tau^2} + (\lambda + k\cos 2\tau)\,x = 0 \tag{45}$$

ist also die Amplitude des periodischen Faktors mit $\cos 2\tau$ nicht konstant, sondern auch noch periodisch veränderlich, und zwar mit einer anderen Periode. Diese Aufgabe tritt auf, wenn man entsprechend den Andeutungen des vorigen Abschnittes auch die von höherer Ordnung kleinen Glieder berücksichtigen will, und zwar ist dann das in (44) allein herausgegriffene Glied eines unter mehreren anderen, denen gegenüber k sehr klein ist. Entsprechend der Aufgabenstellung dieser Mitteilung wird m eine verhältnismäßig große Zahl sein, doch läßt sich (44) auch für kleinere m ohne weiteres lösen, wenn es nur als ganze Zahl angenommen wird. Dann ist nämlich der Faktor von x wieder periodisch (mit der Grundperiode $m\pi$); (44) ist eine *Hill*sche Differentialgleichung, und die bekannten Methoden zur Lösung und zur Beurteilung der Stabilität stehen zur Verfügung. Das Ergebnis einer im wesentlichen in bekannter Weise durchgeführten Rechnung für die Grenzkurve bei $\lambda \leq 0$, die hier hauptsächlich interessiert (entsprechend der zweiten Gleichung (43), ist folgendes.

Die Grenzkurve für $\lambda \leq 0$ hat die Gleichung

$$|k| = \sqrt{c\,(-\lambda)}\,;$$

hierin ist

$$\left.\begin{aligned} c &= 32 \quad \text{für} \quad m = 1, \\ c &= \frac{16\,(m^2-1)^2}{m^2\,(m^2+1)} \quad \text{für} \quad m > 1, \\ c &\to 16 \quad \text{für} \quad m \to \infty. \end{aligned}\right\} \tag{46}$$

Die folgende Tabelle 2 enthält einige Werte von c in Abhängigkeit von m. Für $m \geq 3$ wird also das für die Stabilität erforderliche k vergrößert, wenn diese Amplitudengröße nicht konstant ist, wie in (45), sondern entsprechend (44) periodisch um Null veränderlich. Dies ist plausibel, da nach (44) im Durchschnitt ein kleinerer Amplitudenwert für $\cos 2\tau$ wirksam ist. Für die kleineren Werte von m verliert diese summarische Anschauung ihren Sinn; die Gesamt-

[1] *G. Hamel*, Math. Ann. (1912).

bewegung läßt sich dann nicht mehr als eine Modifikation von (45) mit langsam veränderlichem k auffassen.

Tabelle 2.

m	2	3	4	5	10
c	7,2	11,4	13,2	14,2	16
	$c = 8$ für Gleichung (45)				

Der Wert für $m = 1$ fügt sich nicht in diese Gesetzmäßigkeit. Das zeigt sich auch darin, daß bei $m \geq 2$ die gleichen Werte für c erhalten werden, wenn man in (44) $\cos \frac{2\tau}{m}$ anstatt $\sin \frac{2\tau}{m}$ einsetzt, während hierbei der Faktor von x mit $m = 1$ den Wert $\lambda + \frac{1}{2} k + \frac{1}{2} k \cos \frac{4\tau}{m}$ erhält, also etwas wesentlich Verschiedenes.

Es läge nahe, in (44) $\cos \frac{2\tau}{m}$ anstatt $\sin \frac{2\tau}{m}$ zu schreiben und dann mit $m \to \infty$ den Übergang zu konstanter Amplitude von $\cos 2\tau$ zu versuchen. Dies führt aber nicht zum Ziel; denn zur Aufstellung der Stabilitätsbedingung, die zu Gleichung (46) führt, wird jedesmal die gesamte Periode $m\pi$ herangezogen, die mit $m \to \infty$ ebenfalls nach Unendlich geht.

(Eingegangen am 10. Mai 1951.)

Anschrift des Verfassers: Professor *W. Kucharski*, Berlin-Charlottenburg, Hardenbergstraße 34.

Bemerkung

zu meinem Aufsatz in Band XVIII, S. 363 des Ingenieur-Archivs: „Die Biegeschwingungen eines Stabes unter pulsierender Achsialkraft bei beliebigen Randbedingungen"

Von **K. Klotter.**

Von den Herren *W. Kucharski* und *I. Szabó* in Berlin erhielt ich eine ausführliche, von Herrn *S. Woinowsky-Krieger* in Quebec eine kurze Zuschrift mit Einwänden gegen die Behandlung der Stabilitätsfrage in dem genannten Aufsatz. Ich habe mich von der Richtigkeit der Einwände überzeugt und muß feststellen, daß die Schlüsse, die ich hinsichtlich der Stabilitätsbedingungen des Stabes mit nicht gelenkig gelagerten Enden zog, unhaltbar sind.

(Eingegangen am 23. Juli 1951.)

Anschrift des Verfassers: Professor Dr.-Ing. *K. Klotter*, Stanford (Calif.), 621 Alvarado Row.

Berichtigung

zu meinem Aufsatz in Band XVIII, S. 344 des Ingenieur-Archivs: „Systematische Sechskomponentenmessungen an Pfeilflügeln", I. Mitteilung.

Von **W. Jacobs.**

In der genannten Arbeit sind irrtümlicherweise in Tabelle 2 (Seite 353) die Werte y_N nicht auf $b/2$, wie angegeben, sondern auf $b'/2$ bezogen worden, außer für Absatz 3 (Rechnung mit konstanter $c_{a\,örtl}$-Verteilung) und Absatz 4 (Rechnung mit Mittelwert von konstanter $c_{a\,örtl}$-Verteilung und elliptischer Auftriebsverteilung). Die angegebenen Zahlenwerte für $y_N/(b/2)$ sind also mit b'/b (siehe Tabelle auf Seite 347) zu multiplizieren, um die richtigen Werte zu erhalten. Außerdem sind für Absatz 4 (Rechnung mit Mittelwert von konstanter $c_{a\,örtl}$-Verteilung und elliptischer Auftriebsverteilung) folgende neuen Werte für $y_N/(b/2)$ und x'_N/l_m einzusetzen:

	$Z = 1$		$Z = 0{,}6$	
φ°	$\frac{y_N}{b/2}$	$\frac{x'_N}{l_m}$	$\frac{y_N}{b/2}$	$\frac{x'_N}{l_m}$
−30	0,463	−0,053	0,440	−0,026
0	0,463	0	0,440	0
15	0,463	0,025	0,440	0,012
30	0,463	0,053	0,440	0,026
45	0,463	0,092	0,440	0,044

(Eingegangen am 14. November 1951.)

Anschrift des Verfassers: Dr. habil. *W. Jacobs*, Stockholm (Schweden), Flygtekniska försöksanstalten, Ulvsunda.